ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

Nguyễn Trường Giang

BÀI TOÁN QUY HOẠCH PHI TUYẾN CÓ RÀNG BUỘC

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Chuyên ngành: Toán - Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

Người hướng dẫn: PGS.TS. Nguyễn Hữu Điển

Hà Nội - 2014

BẢNG KÝ HIỆU

Ký hiệu	**Ý nghĩa**
DFP	Davidon- Fletcher- Powell
QHPT	Quy hoạch phi tuyến
$\mathbb{R}^n$	Không gian thực n chiều
$\nabla f(x)$	Gradient của f tại x
$\nabla^2 f(x)$	Hessian của f tại x
o	Vô cùng bé
Δ	Số gia
$0(x, \varepsilon)$	Lân cận của x với bán kính ε
$\|.\|$	Chuẩn vector
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành bản luận văn này tôi đã nhận được sự giúp đỡ to lớn của Thầy, Cô giáo, gia đình và bạn bè xung quanh.

Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn PGS.TS Nguyễn Hữu Điển, Khoa Toán- Cơ- Tin học, Trường Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Trong quá trình giảng dạy và hướng dẫn đã ân cần động viên, giúp đỡ chỉ bảo tận tình cho tôi.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong Khoa Toán- Cơ- Tin học, Phòng sau đại học, Trường Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQG Hà Nội đã dạy dỗ và giúp đỡ tôi rất nhiều trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn. Đặc biệt là các thầy cô trong Seminar của bộ môn Toán giải tích đã có những ý kiến đóng góp quý báu giúp cho bản luận văn hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình nơi đã sinh thành, nuôi nấng, giúp đỡ, động viên tôi rất nhiều trong suốt thời gian qua.

Dù đã cố gắng hết sức nhưng luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Mọi ý kiến đóng góp tôi xin được đón nhận với lòng biết ơn và trân trọng sâu sắc.

Hà Nội, ngày 29 tháng 10 năm 2014

Học Viên

Nguyễn Trường Giang

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU 5

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị 12

1.1. Một số khái niệm cơ sở 12

1.2. Điều kiện tối ưu 16

1.2.1. Điều kiện cấp 1 18

1.2.2. Điều kiện cấp 2 23

Chương 2. Phương pháp tuyến tính hóa 29

2.1. Tổng quan về quy hoạch phi tuyến 29

2.1.1. Giới thiệu chung về QHPT 29

2.1.2. Bài toán QHPT 30

2.1.3. Các vấn đề cần giải quyết khi giải bài toán QHPT 31

2.2. Tuyến tính hóa ràng buộc 33

2.2.1. Bài toán và hướng giải quyết 33

2.2.2. Thuật toán siêu phẳng cắt Kelley 34

2.2.3. Sự hội tụ của thuật toán 39

2.2.4. Ví dụ minh họa 39

2.2.5. Chương trình giải ví dụ thuật toán Kelley 43

2.3. Tuyến tính hóa mục tiêu 48

2.3.1. Bài toán và hướng giải quyết 48

2.3.2. Thuật toán Frank- Wolfe 48

2.3.3. Sự hội tụ của thuật toán 51

2.3.4. Ví dụ minh họa 52

2.3.5. Chương trình giải ví dụ thuật toán Frank- Wolfe 54

KẾT LUẬN 59

TÀI LIỆU THAM KHẢO 60

LỜI MỞ ĐẦU

Tối ưu hóa là một trong những lĩnh vực kinh điển của toán học, có ảnh hưởng đến hầu hết các lĩnh vực khoa học- công nghệ và kinh tế- xã hội. Trong thực tế, việc tìm giải pháp tối ưu cho một vấn đề nào đó chiếm vai trò rất quan trọng. Phương án tối ưu là phương án hợp lý nhất, tốt nhất, tiết kiệm chi phí, thời gian, tài nguyên, nguồn nhân lực mà lại cho tiệu quả cao.

Những năm gần đây nhiều bài toán thực tế được giải quyết bằng phương pháp mô hình hóa toán học rất thành công. Trong số các mô hình toán học được áp dụng có nhiều mô hình tối ưu được giải quyết thông qua các bài toán tối ưu kinh điển. Bài toán tối ưu được phát biểu như sau:

Cho $D \in \mathbb{R}^n, D \neq \emptyset$ với $\mathbb{R}^n$ là không gian vector và hàm $f : D \to \mathbb{R}$ tùy ý. Tìm giá trị cực tiểu của hàm $f(x)$ khi $x \in D$ nghĩa là bài toán tìm vector w thuộc vào tập D sao cho với mọi giá trị của x thuộc D thì

$$f(w) \leq f(x).$$

Trong đó

- f gọi là hàm mục tiêu.
- D được gọi là tập ràng buộc.
- $x \in D$ là phương án chấp nhận được.
- $w \in D$ là phương án tối ưu.
- $f(w)$ là giá trị tối ưu.

Trong trường hợp hàm mục tiêu cũng như tất cả các ràng buộc đều tuyến tính, thì bài toán tối ưu là BTQHTT. BTQHTT có thể được giải bằng một số phương pháp tối ưu quen biết như phương pháp đơn hình, phương pháp đơn hình cải biên và các phương pháp điểm trong. BTQHTT đã và đang được sử dụng rộng rãi trong quy hoạch tài nguyên, quản lý sử dụng đất cũng như nhiều lĩnh vực của quản lý kinh tế và quản trị kinh doanh. Trong trường hợp hoặc là hàm mục tiêu hoặc một trong số các ràng buộc là phi tuyến thì chúng ta có BTQHPT. Cụ thể, trên thực tế có nhiều vấn đề trong kinh tế và trong các hoạt động kinh doanh có những mối liên hệ với nhau không phải tuyến tính mà là phi tuyến. Sự tồn tại các mối quan hệ không theo tỉ lệ như doanh số đạt được không theo tỷ lệ với giá bán (vì giá bán có thể tăng và doanh số có thể giảm).

Khi tập ràng buộc D chính là $\mathbb{R}^n$ thì ta có bài toán QHPT không ràng buộc. Ngược lại, ta có bài toán QHPT có ràng buộc. Luận văn này trình bày một phần nhỏ lý thuyết tối ưu, đó là tìm hiểu bài toán QHPT có ràng buộc sau đây.

$$f(x) \to \min \text{ với } x \in D = \left\{ x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, p} \right\}, \quad (1)$$

trong đó $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm tùy ý.

Như chúng ta đã biết, có rất nhiều phương pháp giải các lớp bài toán tối ưu phi tuyến riêng biệt , nhưng chưa có phương pháp nào tỏ ra hữu hiệu cho mọi bài toán tối ưu phi tuyến. Do vậy, chúng ta sẽ lần lượt điểm qua một số phương pháp giải BTQHPT có ràng buộc để làm rõ ưu nhược điểm của từng phương pháp cũng như chọn được phương pháp phù hợp cho từng bài toán thực tế.

Đầu tiên, phương pháp hình học được coi là phương pháp đơn giản để tìm nghiệm tối ưu cho bài toán cực trị cỡ nhỏ với thuật toán như sau

Bước 1. Vẽ miền chấp nhận được D của bài toán (1). Nếu miền D rỗng thì kết luận bài toán (1) vô nghiệm.

Bước 2. Vẽ mặt mức $f(x_1, ..., x_n) = \alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bước 3. Giảm dần mức α (tăng dần mức α) để xác định mặt mức thấp nhất hay xác lập bài toán không giải được do hàm mục tiêu f giảm vô hạn trện D.

Bước 4. Nếu bài toán giải được thì tìm một điểm thuộc D mà mặt mức thấp nhất đi qua nó. Điểm tìm được chính là nghiệm tối ưu của bài toán (1) và tính giá trị hàm mục tiều f tại điểm vừa tìm được ta có f_{min}.

Nhóm phương pháp tiếp theo với ý tưởng đưa bài toán quy hoạch có ràng buộc về bài toán quy hoạch không ràng buộc, bằng cách thay t hế hàm mục tiêu ban đầu $f(x)$ bởi hàm mục tiêu mở rộng $F(x, r)$ chứa thông số r và có tính đến các ràng buộc. Giá trị của hàm mục tiêu mở rộng phải trùng với giá trị hàm mục tiêu ban đầu và khi ra ngoài miền ràng buộc thì giá trị hàm mục tiêu mở rộng khác với giá trị hàm mục tiêu ban đầu. Khi $x \to w$ dẫn đến $F(w, r) \to f(w)$. Với mỗi tập ràng buộc khác nhau ta có hàm mục tiêu mở rộng $F(x, r)$ được chọn khác nhau, do đó ta cũng có các phương pháp khác nhau.

Phương pháp nhân tử Lagrange. Phương pháp này thường được dùng để tìm cực trị của hàm với các ràng buộc đẳng thức và hàm mục tiêu mở rộng cũng được xây dựng bởi hàm Lagrange như sau

$$L(x, r) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x),$$

với λ_j các nhân tử Lagrange, $j = 1, 2, ..., m$. Điều kiện cần để tồn tại cực trị địa phương của $L(x, r)$ là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \text{ với } i = \overline{1, n} \\ g_j(x) = 0; \text{ với } j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Như vậy, ta có $(n + m)$ phương trình để xác định $(n + m)$ ẩn.

Phương pháp này có ưu điểm là nó cho phép đưa bài toán cực trị có điều kiện về bài toán cực trị không điều kiện, nhờ đó có thể vận dụng được nhiều phương pháp tìm cực trị khác nhau. Trường hợp ràng buộc đẳng thức thì đưa về giải hệ phương trình tuyến tính đối với bài toán cỡ nhỏ thì phương pháp này được dùng có hiệu quả. Tuy nhiên, muốn nhận biết nghiệm dừng là max hay min ta phải tiếp tục xét đạo hàm cấp hai của L, do đó phức tạp.

Phương pháp Carroll. Hàm mục tiêu $f(x) \to \min(\max)$, các ràng buộc $g_i(x) \geq 0; i = 1, 2, ..., m$. Hàm mục tiêu mở rộng được xây dựng ở đây

$$F(x,r) = f(x) \pm r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{w}_j}{g_j(x)},$$

- dấu $'' + ''$ khi tìm $\min f(x)$
- dấu $'' - ''$ khi tìm $\max f(x)$
- r_k nhân tử ở bước lặp thứ k
- w_j trọng số.

Phương pháp Fiacco và Cormick. hàm mục tiêu $f(x) \to \min(\max)$ với ràng buộc

- $g_i(x) \geq 0$ với $i = \overline{1,n}$.
- $h_j(x) = 0$ với $j = \overline{1,m}$.

Hàm mục tiêu mở rộng được xây dựng có dạng

$$F(x,r) = f(x) \pm r \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(x)} \pm r^{\frac{-1}{2}} \sum_{j=1}^{m} h_j{}^2(x).$$

Phương pháp chọn r_0 đối với $F(x,r) \to \min$.

Đặt $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i(x)}$.

Khi $x^{(0)}$ không ở gần biên của ràng buộc

$$r_0 = \frac{-\nabla f(x^0)^T p(x^0)}{[\nabla p(x^0)]^2}.$$

Khi x^0 ở gần biên của ràng buộc

$$r_0 = \sqrt{\frac{\nabla f(x^0) H^{-1} \nabla f(x^0)}{\nabla p(x^0) H^{-1} \nabla p(x^0)}},$$

trong đó H là ma trận Hessian.

Phương pháp Pietrzykoski. Hàm mục tiêu $f(x) \to \min(\max)$ với ràng buộc

- $g_i(x) \geq 0$ với $i = \overline{1.n}$,

- $h_j(x) = 0$ với $j = \overline{1, m}$.

Hàm mục tiêu mở rộng

$$F(x,r) = rf(x) - \sum_{j=1}^{m} {h_j}^2(x) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_i {g_i}^2(x).$$

Trong đó

- $w_i = 1$ đối với $g_i(x) \geq 0$,
- $w_i = 0$ đối với $g_i(x) < 0$.

Tiếp theo là phương pháp Sai lệch linh hoạt. Ý tưởng cơ bản của phương pháp này là mở rộng miền ràng buộc bằng cách đưa hàm $T(x)$ là tổ hợp các ràng buộc. Như vậy bài toán (1) được đưa về dạng

- Tìm cực tiểu của $f(x)$ với $x \in \mathbb{R}^n$.
- Thỏa mãn ràng buộc $\phi^{(k)} - T(x) \geq 0$.
- Sai lệnh này so với ràng buộc ở bước lặp thứ k là

$$\begin{cases} \phi^{(k)} = \min \left\{ \phi^{(k-1)}, \frac{m+1}{r+1} \sum_{i}^{r+1} \left\| {x_i}^{(k)} - {x_c}^{(k)} \right\|^2 \right\}, \\ \phi^{(0)} = 2(m+1), \end{cases}$$

trong đó

- d là kích thước của đơn hình ban đầu.
- ${x_k}^{(k)}$ là điểm thứ i của đơn hình trong $\mathbb{R}^n$.
- $r = n - m$ là số bậc tự do của $f(x)$.
- ${x_c}^{(k)}$ là trọng tâm của đơn hình.

Rõ ràng ta luôn có $\phi^{(0)} \geq \phi^{(1)} \geq ... \geq \phi^{(k)} \geq 0$ khi dần đến điểm cực tiểu thì kích thước đơn hình dần đến 0 và khi đó $\phi^{(k)} \to 0$. tổ hợp ràng buộc là

$$T(x) = \left[\sum_{i=1}^{m} {h_i}^2(x) + \sum_{i=m+1}^{p} u_i {g_i}^2(x) \right]^{\dfrac{1}{2}}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Điển (2006), *Một số vấn đề về thuật toán*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Nhật Lệ (2001), *Tối ưu hóa ứng dụng*, NXB Khoa học và kỹ thuật.

[3] Nguyễn Đức Nghĩa - Vũ Văn Thiệu - Trịnh Anh Phúc (2012), *Các phương pháp cực tiểu hóa ràng buộc*, Bộ môn KHMT, Viện CNTT trường ĐHBK Hà Nội.

[4] Bùi Thế Tâm - Trần Vũ Thiệu (1998), *Các phương pháp tối ưu hóa*, NXB Giao thông vận tải.

[5] Nguyễn Hải Thịnh (2006), *Tối ưu hóa*, NXB Bách khoa Hà Nội.

[6] Danzig G.B and Thapa M.N (2003), *Linear programming 2 - Theory and Extensions*,Springer Verlag, New York Berlin, Heideiberg.

[7] David G.Luenberger - Yingu Ye (2008), *Linear and Nonlinear programming*, Dept. of Mgmt, Sience and Engineering Stanford University, Stanford, CA, USA.

[8] Enrique Dell Castillo - Douglas C.montgomery - Daniel R. Mc Carville (1996), *Modified Desirability Function for multiple response optimization*, University of Texes, Arizana state University Tenpe, AZ $85287 - 5906$.

[9] Makhatar S.bazara - Hanif d.Sherali - C.M Shetty (2006), *Nonlinear programming. Theory and Algorithins*, John Wiley and Suns, Inc.

[10] Wenya sun - Ya-xiang Yuan (2006),*Optimization theory and methods* , Sprinjer Science Pusiness Media, LLC,23 street NewYork NY 10013, USA.