ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ LIÊN

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: PGS.TS VŨ ĐỖ LONG

Hà Nội, 2015

Mục lục

Lời nói đầu

Hình học tổ hợp – là một bộ phận của hình học nói chung và là một nhánh của tổ hợp. Những bài toán liên quan đến hình học tổ hợp rất đa dạng về nội dung và phương pháp giải. Nhiều bài toán phát biểu đơn giản, có thể thấy đúng ngay nhưng để giải được thì cần trang bị những kiến thức riêng về hình học tổ hợp và hình học. Khi đó bài toán sẽ trở nên rất dễ dàng. Tuy nhiên cũng có những bài đòi hỏi kiến thức chuyên sâu, và thậm chí có nhiều bài hình học tổ hợp tổng quát cho không gian vẫn chưa có lời giải.

Hình học tổ hợp được coi như nội dung dành cho học sinh khá, giỏi bậc Trung học cơ sở và thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi tuyển sinh THPT chuyên, đề thi Olympic truyền thống 30/4,…

Luận văn này đưa ra một số cách giải cơ bản cho các bài hình học tổ hợp xuất hiện trong các kì thi thời gian qua, là tài liệu tham khảo cho các học sinh khá, giỏi từ lớp 7.

Bố cục của luận văn này gồm ba chương

Chương 1. Một số phương pháp cơ bản.

Chương này trình bày các phương pháp cơ bản được vận dụng để giải các bài toán hình học tổ hợp như: Nguyên lí Đirichlê; nguyên lí cực hạn; phương pháp đồ thị, tô màu; phương pháp tạo đa giác bao; phương pháp mở rộng, thu nhỏ một hình. Ngoài ra phương pháp phản chứng cũng được sử dụng nhiều nhưng đan xen cùng các phương pháp khác.

Chương 2. Một số dạng toán hình học tổ hợp thường gặp.

Chương này đưa ra các bài toán hình học tổ hợp cụ thể, đã được sắp xếp theo từng dạng: Hệ điểm và đường thẳng; điểm nằm trong hình; hình nằm trong hình; phủ hình; hình giao nhau; đếm các yếu tố hình học; đánh giá độ dài, góc, diện tích.

Chương 3. Một số bài hình học tổ hợp trong các đề thi.

Chương này đưa ra một số bài hình học tổ hợp có trong các đề thi học sinh giỏi lớp 9 các tỉnh, các đề thi tuyển sinh THPT chuyên, các đề thi Olympic Toán học.

Để hoàn thành được luận văn này, em xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới *PGS. TS Vũ Đỗ Long* đã dành thời gian hướng dẫn, đánh giá, chỉ bảo, tận tình giúp đỡ em trong quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thiện luận văn.

Qua đây em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban giám hiệu, phòng sau Đại học, khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội đã tạo điều kiện thuận lợi cho em trong suốt quá trình học tập tại trường.

Em xin cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, tạo điều kiện, giúp đỡ em hoàn thành luận văn này.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên các vấn đề trong luận văn vẫn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi có những sai sót trong cách trình bày. Mong được sự góp ý xây dựng của thầy cô và các bạn.

Em xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 04 năm 2015

Học viên

Trần Thị Liên

Chương 1

Một số phương pháp cơ bản

Trước khi đi vào một số phương pháp cơ bản để giải bài toán hình học tổ hợp, ta xét các khái niệm sau

+ Một hình F được gọi là *lồi* nếu với hai điểm A và B bất kì thuộc F, thì đoạn thẳng nối hai điểm A, B cũng thuộc F.

+ Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì trong một hình lồi là *đường kính của hình lồi* đó.

1.1. Nguyên lí Đirichlê

Người đầu tiên đề xuất nguyên lí này được cho là nhà toán học Đức Johann Đirichlê khi ông đề cập tới nguyên lí với tên gọi "nguyên lí ngăn kéo" (The Drawer Principle). Ngoài ra nguyên lí này còn được biết đến như nguyên lí chim bồ câu (The Pigeonhole Principle) hoặc nguyên lí những cái lồng nhốt thỏ.

Nguyên lí này được Đirichlê phát biểu đầu tiên năm 1834.

"Nguyên lý Đirichlê ở dạng cổ điển thường được dùng để chứng minh tồn tại theo kiểu không xây dựng (non-constructive), tức là biết đối tượng tồn tại nhưng không chỉ ra cụ thể." (Trích bài giảng Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh, trình bày tại chương trình Gặp gỡ toán học 2010 do ĐHQG Tp.HCM tổ chức từ ngày 25/1 - 31/1/2010.)

a) Nguyên lí Đirichlê cơ bản

Nhốt $n+1$ thỏ vào n lồng thì tồn tại một lồng có ít nhất hai thỏ.

b) Nguyên lí Đirichlê tổng quát

Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp, N không chia hết cho k, thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left[\frac{N}{k}\right]+1$ đồ vật.

(Ở đây, $[x]$ là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.)

Chứng minh

Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left[\frac{N}{k}\right]+1$ vật. Khi đó tổng số đồ vật nhỏ hơn hoặc bằng $k\left[\frac{N}{k}\right]<N$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết có N đồ vật được đặt vào hộp.

c) Nguyên lí Đirichlê đối ngẫu

Cho tập hữu hạn $S \neq \varnothing$, và $S_1, S_2, ..., S_n$ là các tập con của S sao cho $|S_1|+|S_2|+...+|S_n|>k|S|$. Khi đó, tồn tại một phần tử x thuộc S sao cho x là phần tử chung của $k+1$ tập $S_i, i=\overline{1,n}$.

Ở đây $|S|$ là số phần tử của tập hợp S.

$|S_i|, i=\overline{1,n}$ là số phần tử của các tập hợp S_i.

d) Nguyên lí Đirichlê cho diện tích

Nếu K là một hình phẳng, $K_1, K_2, ..., K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i=\overline{1,n}$, và $|K|<|K_1|+|K_2|+...+|K_n|$.

Ở đây $|K|$ là diện tích của hình phẳng K, còn $|K_i|$ là diện tích hình phẳng K_i, $i=\overline{1,n}$.

Khi đó, tồn tại ít nhất hai hình phẳng K_i, K_j, $(1 \leq i < j \leq n)$ sao cho K_i, K_j có điểm trong chung.

e) Nguyên lí Đirichlê vô hạn

Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn ngăn kéo thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn các quả táo.

f) Nguyên lí Đirichlê đối với đoạn thẳng

Ta kí hiệu $d(I)$ là độ dài của đoạn thẳng I nằm trong ¡ .

Cho A là một đoạn thẳng, $A_1, A_2, ..., A_n$ là các đoạn thẳng sao cho $A_i \subset A, i=\overline{1,n}$ và $d(A)<d(A_1)+d(A_2)+...+d(A_n)$.

Khi đó ít nhất có hai đoạn thẳng trong số các đoạn thẳng trên có một điểm trong chung.

Chứng minh

Giả sử không có hai đoạn thẳng nào trong các đoạn thẳng đã cho có điểm trong chung. Khi đó

$$d(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = d(A_1) + d(A_2) + ... + d(A_n) > d(A).$$

Mà từ $A_i \subset A, i = \overline{1,n}$, ta có $d(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \le d(A)$.

Hai bất đẳng thức trên mâu thuẫn với nhau nên điều giả sử là sai.

Vậy có ít nhất có hai đoạn thẳng trong số các đoạn thẳng trên có một điểm trong chung.

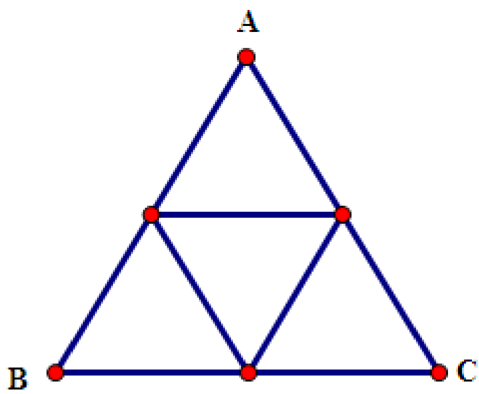
- Nguyên lí Đirichlê thường liên quan đến các bài toán thi đấu thể thao, chia hết, nguyên tố cùng nhau, đồ thị, tô màu, quen nhau và các bài toán hình học. Ở đây chỉ đưa ra một số bài toán cơ bản sau.

Bài 1.1. Bên trong tam giác đều ABC cạnh bằng $2m$ đặt năm điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn $1m$.

Lời giải

Ba đường trung bình của tam giác đều cạnh $2m$ sẽ chia nó ra thành bốn tam giác đều có cạnh $1m$ (hình 1).

Ta có năm điểm đặt trong bốn tam giác. Do đó theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại một tam giác nhỏ mà trong đó có ít nhất hai điểm đã cho, và các điểm đó không thể rơi vào các đỉnh của tam giác ABC. Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn $1m$.



hình 1

Bài 1.2. Trên mặt phẳng cho 43 điểm. Trong đó cứ ba điểm bất kì luôn luôn tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 22 điểm đã cho.

Lời giải

Lấy A là một trong số 43 điểm đã cho. Xét hình tròn $(A;1)$. Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra

+ Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong hình tròn $(A;1)$ thì kết luận của bài toán là đúng.

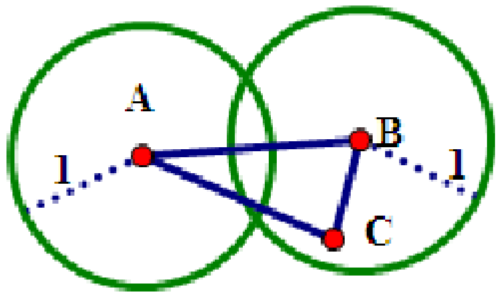
+ Tồn tại điểm $B \neq A$ (B thuộc trong số 43 điểm đã cho), sao cho $B \notin (A;1)$. Vì $B \notin (A;1)$ nên $AB > 1$.

Xét hình tròn $(B;1)$.

Lấy C là điểm bất kì trong số 43 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$.

Theo giả thiết và dựa vào $AB > 1$, ta có $Min\{CA, CB\} < 1$.

Vì thế $C \in (A;1)$, hoặc $C \in (B;1)$ (hình 2).



hình 2

Vì C là điểm bất kì trong số 43 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$ nên các hình tròn $(A;1)$, $(B;1)$ chứa tất cả 43 điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lí Đirichlê, một trong hai hình tròn trên chứa không ít hơn 22 điểm đã cho. Ta có điều cần chứng minh.

Tổng quát

Cho $2n+1$ điểm trên mặt phẳng (với $n \geq 3$). Biết trong đó cứ ba điểm bất kì luôn luôn tìm được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n+1$ điểm đã cho.

Bài 1.3. Cho một hình vuông có diện tích bằng 1. Người ta đặt vào trong hình vuông một cách tùy ý 101 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác với ba đỉnh là các điểm trong số các điểm đã cho có diện tích không quá $\frac{1}{100}$.

Lời giải. Ta chia hình vuông $ABCD$ thành 50 hình chữ nhật bằng nhau có diện tích $\frac{1}{50}$ bằng cách sau

+ Chia cạnh AB thành 10 đoạn liên tiếp bằng nhau.

+ Chia cạnh AD thành 5 đoạn liên tiếp bằng nhau.

Khi đặt 101 điểm vào trong 50 hình chữ nhật thì ít nhất một hình chữ nhật chứa ba điểm. Giả sử hình chữ nhật đó chứa ba điểm M, N, K.

Khi đó diện tích ΔMNK không lớn hơn một nửa diện tích hình chữ nhật chứa nó tức là không lớn hơn $\frac{1}{100}$. Điều đó có nghĩa là tồn tại ít nhất một tam giác với ba đỉnh là các điểm trong số các điểm đã cho có diện tích không quá $\frac{1}{100}$.

- Tương tự ta có bài toán sau

Bài 1.4. Trong hình vuông có cạnh bằng 1, đặt 201 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất ba trong số 201 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{14}$.

Lời giải. Chia hình vuông đã cho thành 100 hình vuông nhỏ bằng nhau có cạnh bằng $\frac{1}{10}$. Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại ít nhất một hình vuông nhỏ, chẳng hạn hình vuông a chứa ít nhất ba trong số 201 điểm đó. Đường tròn ngoại tiếp hình vuông a có bán kính $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{14}$.

Vậy ba điểm nói trên nằm trong hình tròn đồng tâm với hình vuông a và có bán kính $\frac{1}{14}$.

Tổng quát. Ta có thể tổng quát hóa bài toán trên với a là kích thước của cạnh hình vuông, m là số điểm đặt bất kì, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất n trong số m điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{a}{\sqrt{2.\left[\frac{m}{n-1}\right]}}$.

(trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x.)

- Nguyên lí Đirichlê còn được sử dụng rất nhiều trong các bài toán về tô màu đồ thị.

Bài 1.5. Giả sử mỗi điểm trên mặt phẳng có kẻ lưới ô vuông được tô bằng một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Lời giải

Xét một lưới ô vuông được tạo bởi ba đường nằm ngang A, B, C và chín đường nằm dọc được đánh số từ 1 đến 9.

Xét ba nút lưới của một đường nằm dọc ta thấy rằng mỗi nút có hai cách tô màu nên mỗi bộ ba nút có $2\times2\times2=8$ cách tô màu.

Như vậy có chín đường nằm dọc mà có tám cách tô nên sẽ có hai đường nằm dọc có cùng cách tô màu. Giả sử nút giao của hai đường dọc đó là hai bộ ba điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3.

Vì ba điểm A_1, A_2, A_3 chỉ có hai cách tô nên có hai điểm tô cùng màu. Giả sử A_1, A_2 tô cùng màu.

Vì hai bộ này có cách tô màu giống nhau nên B_1, B_2 cũng tô cùng màu và cùng màu với A_1, A_2. Do đó hình chữ nhật $A_1A_2B_2B_1$ có các đỉnh tô cùng màu.

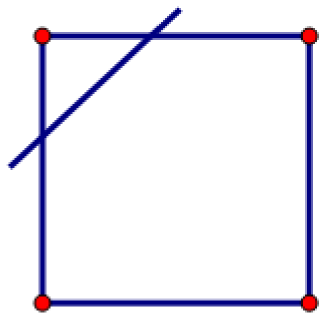
Tổng quát

Nếu mỗi điểm trên mặt phẳng có kẻ lưới ô vuông được tô bằng một trong n màu thì tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Bài 1.6. Cho hình vuông và 21 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $2:3$. Chứng minh rằng trong 21 đường thẳng đó, có ít nhất sáu đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Lời giải

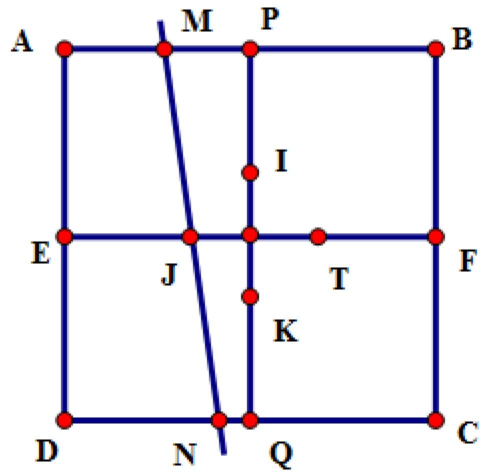
Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và một ngũ giác (chứ không phải là chia hình vuông thành hai tứ giác) (hình 3).



hình 3

Như vậy, mọi đường thẳng (trong số 21 đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối AB và CD tại các điểm M và N. (Ở đây E và F lần lượt là trung điểm của AD và CB) (hình 4).



hình 4

Ta có $\frac{S_{AMND}}{S_{MBCN}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{EJ}{FJ}=\frac{2}{3}$.

Vậy mỗi đường thẳng đã cho chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $2:3$. Có bốn điểm chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số đó là I,J,K,T như hình 4, với P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$$\frac{EJ}{JF}=\frac{FT}{TE}=\frac{PI}{IQ}=\frac{QK}{KP}=\frac{2}{3}.$$

Có 21 đường thẳng đi qua 4 điểm nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại một trong 4 điểm I,J,K,T sao cho nó có ít nhất 6 trong 21 đường thẳng đã cho đi qua. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.7. Có năm cặp vợ chồng tổ chức một buổi gặp mặt. Khi gặp mặt, họ bắt tay nhau nhưng không ai tự bắt tay người trong gia đình và người mà vợ hoặc chồng của mình đã bắt tay, hai người bắt tay nhau không quá một lần. Sơn hỏi chín người còn lại là họ đã bắt tay được bao nhiêu lần. Họ nhận thấy chín người được hỏi đều trả lời những con số khác nhau. Hỏi vợ Sơn bắt tay mấy lần?

Lời giải. Mỗi người bắt tay không quá 8 lần (trừ mình và người trong gia đình).

Vì câu trả lời của 9 người là 9 số khác nhau nên là các số từ 0 đến 8.

Người bắt 0 lần phải là hôn thê của người bắt 8 lần.

Người bắt 1 lần phải là hôn thê của người bắt 7 lần.

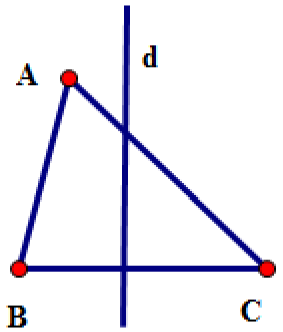
Người bắt 2 lần phải là hôn thê của người bắt 6 lần.

Người bắt 3 lần phải là hôn thê của người bắt 5 lần.

Còn một người bắt tay 4 lần, đó là vợ Sơn.

Bài 1.8. Chứng minh rằng một đường thẳng chỉ có thể cắt nhiều nhất hai cạnh của một tam giác ở phần trong của các cạnh này.

Hướng dẫn giải. Một đường thẳng d bất kì luôn chia mặt phẳng ra làm hai miền, cho nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại một miền chứa ít nhất hai đỉnh, không mất tổng quát ta giả sử đó là hai đỉnh A và B của tam giác ABC, (hình 5). Khi đó cạnh AB nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng này và không cắt d.



hình 5

Bài 1.9. Trong mặt phẳng cho tập hợp A có n điểm, $n \geq 2$. Một số cặp điểm được nối với nhau bằng các đoạn thẳng. Chứng minh rằng tập A có ít nhất hai điểm được nối với cùng một số lượng điểm khác thuộc A.

Lời giải. Giả sử điểm M thuộc tập $A, S(M)$ là số điểm được nối với M. Khi đó

$$0 \le S(M) \le n-1.$$

Mặt khác sẽ không tồn tại hai điểm M, N thuộc A mà $S(M)=0$ và $S(N)=n-1$ vì nếu $S(N)=n-1$ tức là N được nối với $n-1$ điểm còn lại nên $S(M)\ge 1$. Mâu thuẫn.

Vậy chỉ có thể có tối đa $n-1$ giá trị cho $S(M)$. Mà có n điểm nên tồn tại ít nhất hai điểm được nối với cùng một số lượng điểm khác thuộc A.

Bài 1.10. Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Hướng dẫn giải. Một đa giác lồi có n cạnh thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi $2k$ cạnh, $k \ge 2$).

Khi đó số đường chéo của nó là

$$s=\frac{2k(2k-3)}{2}=2k(k-2)+k>2k(k-2). \quad (1)$$

Giả sử ngược lại mỗi đường chéo của đa giác đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có $2k$ cạnh, vì thế từ (1) ta có tồn tại ít nhất $k-1$ đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của đa giác đã cho. Thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song với $k-2$ đường chéo thì $2k$ cạnh song song tối đa $2k(k-2)$ đường chéo. Điều này mâu thuẫn với (1). Vậy có k đường thẳng song song với nhau $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1},a$.

Vì đa giác đã cho là đa giác lồi nên các đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ a.

Không mất tính tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a. Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong k đoạn trên. Do đó toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng bờ d_1. Mà d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác. Vậy điều giả sử là sai tức là tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Bài 1.11. Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi, tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

Lời giải. Gọi M là mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó, vì có k mặt có cạnh chung với M nên đa diện có ít nhất $k+1$ mặt. Vì M là mặt có số cạnh lớn nhất bằng k nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $1,2,...,k$. Vậy đa diện có ít nhất $k+1$ mặt, số cạnh của nó nhận một trong k giá trị. Theo nguyên lí Đirichlê, có ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

Bài 1.12. Trong một hình lập phương có cạnh $15m$ chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính $1m$ chứa ít nhất sáu điểm trong số 11000 điểm đó.

Lời giải. Chia mỗi hình lập phương thành 13 phần thì hình lập phương được chia thành

$13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Ta thấy $11000 > 5.2197 = 10985$.

Nên tồn tại ít nhất một hình lập phương nhỏ mà hình lập phương này chứa ít nhất sáu điểm.

Gọi cạnh hình lập phương nhỏ là a thì hình cầu ngoại tiếp hình lập phương có bán kính là $R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

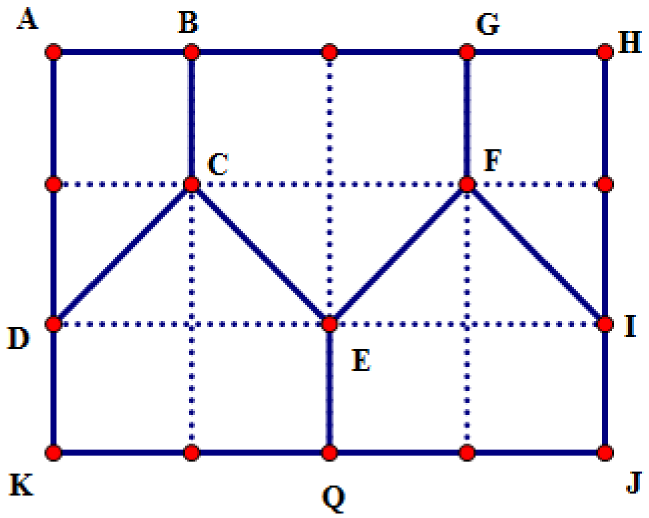
Do đó $R = \frac{15}{13}.\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Vậy có một hình cầu bán kính $15m$ chứa ít nhất sáu điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Bài 1.13. Trong hình chữ nhật 3×4 đặt sáu điểm. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chia hình chữ nhật đã cho thành năm hình $ABCD, BCEFG, FGHI, CDKQE, \mathrm{EF}IJQ$.

Có sáu điểm đặt vào năm hình nên tồn tại một trong năm hình chứa ít nhất hai trong sáu điểm đã cho.



hình 6

Cả năm hình trên đều có đường kính là $\sqrt{5}$ nên luôn tìm được hai điểm trong số sáu điểm đã cho có khoảng cách không quá $\sqrt{5}$.

Bài 1.14. Cho (x_i, y_i, z_i), $i=\overline{1,9}$ là một tập hợp gồm chín điểm khác nhau có tọa độ nguyên trong không gian. Chứng minh rằng trung điểm của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

Lời giải

Gọi tọa độ hai điểm bất kì trong không gian là $A(a,b,c)$ và $B(d,e,f)$.

Vậy trung điểm của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{a+d}{2},\frac{b+e}{2},\frac{c+f}{2}\right)$.

Các tọa độ của điểm I nguyên nếu và chỉ nếu a và d; b và e; c và f cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Có tất cả $2^3=8$ bộ ba chẵn, lẻ khác nhau nên theo nguyên lí Đirichlê, có ít nhất hai trong chín điểm có cùng bộ ba chẵn, lẻ như nhau.

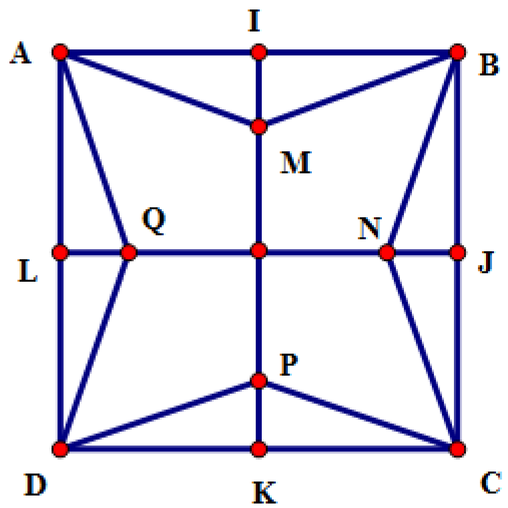
Vậy có ít nhất một cặp điểm mà trung điểm của chúng có tọa độ nguyên.

Tổng quát hóa bài toán. Cho tập hợp gồm m điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian. Chứng minh rằng trung điểm của đường nối ít nhất $\left[\dfrac{\left[\dfrac{m}{8}\right]+1}{2}\right]$ trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

Bài 1.15 (Đề thi đề nghị của Trường THPT Mạc Đĩnh Chi - TP. Hồ Chí Minh, Olympic 30 tháng 4, 2014). Cho bảy điểm phân biệt nằm bên trong một hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10. Chứng minh rằng có ít nhất một điểm trong hình vuông đã cho (có thể nằm trên cạnh của hình vuông) sao cho khoảng cách từ nó đến bảy điểm đã cho đều lớn hơn $2,5$.

Lời giải

Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Trên đoạn IK lấy các điểm M, P; trên đoạn JL lấy các điểm N, Q sao cho $IM = JN = KP = LQ = 1$.



hình 7

Ta có

$MP = NQ = 8 > 5$.

$MA = MB = NC = PC = PD = QD = QA$
$= \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} > 5$.

Và $MN = NP = PQ = QM = 4\sqrt{2} > 5$.

Do đó nếu xét tám hình tròn có tâm lần lượt là A, B, C, D, M, N, P, Q, bán kính là $2,5$ thì các hình tròn này đôi một không có điểm chung.

Có bảy điểm phân biệt, có tám hình tròn nên tồn tại ít nhất một hình tròn không chứa điểm nào trong số bảy điểm đã cho. Tâm của hình tròn này chính là điểm có khoảng cách từ nó đến bảy điểm đã cho đều lớn hơn $2,5$.

1.2. Nguyên lí cực hạn

Nguyên lí 1: "Trong một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực, tồn tại số nhỏ nhất và tồn tại số lớn nhất".

Nguyên lí 2: "Trong một tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn có thể chọn được số nhỏ nhất".

- Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như

- Xét đoạn thẳng lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các đoạn thẳng.
- Xét góc lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các góc.
- Xét đa giác có diện tích hoặc chu vi lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các đa giác.
- Xét khoảng cách lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn các khoảng cách giữa hai điểm hoặc khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
- Xét các điểm ở phía trái nhất hoặc ở phía phải nhất của một đoạn thẳng (giả thiết đoạn thẳng đó nằm ngang).

- Nếu A là tập hợp những điểm trong mặt phẳng (không gian) thì một điểm P sẽ gọi là *điểm biên* của A nếu mọi hình tròn (quả cầu) tâm P chứa cả những điểm thuộc A và những điểm không thuộc A. Tập hợp những điểm biên của A gọi là *tập biên* của A.

Bài 1.16. Tồn tại hay không tồn tại 20 điểm sao cho với bất kì hai điểm A, B nào trong 20 điểm đó cũng tồn tại điểm C trong các điểm còn lại sao cho $\widehat{ACB} < 60^0$.

Lời giải

Giả sử tồn tại 20 điểm thỏa mãn tính chất như đề bài. Gọi A, B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách giữa hai điểm trong 20 điểm đã cho. Theo đề bài, tồn tại điểm C trong các điểm còn lại sao cho $\widehat{ACB} < 60^0$.

Điểm C không thể thuộc đường thẳng AB vì $\widehat{ACB} < 60^0$. Vậy ta xét ΔABC, AB là cạnh lớn nhất nên $\widehat{ACB}$ là góc lớn nhất của ΔABC.

Vì $\widehat{ACB} < 60^0$ nên $\hat{A} < 60^0$, $\hat{B} < 60^0$. Từ đó ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3.60^0 = 180^0$. Điều này vô lí. Vậy điều giả sử là sai. Do đó không tồn tại 20 điểm thỏa mãn tính chất như đề bài.

Bài 1.17. Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Lấy M là một điểm tùy ý của tứ giác lồi $ABCD$. Có hai trường hợp xảy ra

TH1. M nằm trên một cạnh của tứ giác $ABCD$. Khi đó M nằm trong hình tròn có đường kính là cạnh ấy. Trong trường hợp này kết luận của bài toán là đúng.

TH2. M nằm ở miền trong tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó ta có

$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^0$.

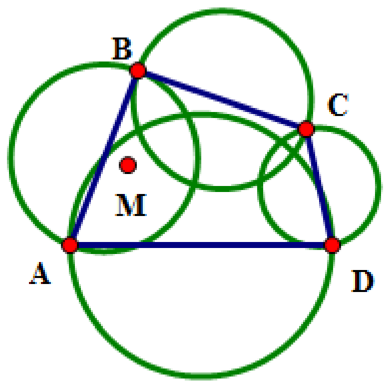
Theo nguyên lí cực hạn thì tồn tại

$\max\{\widehat{AMB}, \widehat{BMC}, \widehat{CMD}, \widehat{DMA}\} = \widehat{BMA}$.

Khi đó $\widehat{BMA} \geq 90^0$, hình 8.

Nên M nằm trong (hoặc nằm trên) đường tròn đường kính AB.

Vậy M bị phủ bởi đường tròn này.



hình 8

Do M là điểm tùy ý của tứ giác $ABCD$, nên bốn hình tròn nói trên phủ kín tứ giác lồi đã cho. Điều phải chứng minh.

Bài 1.18 (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1992 - 1993 bảng A).

Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá năm máy bay đến.

Lời giải. Từ giả thiết ta có nếu các máy bay từ các sân bay M và N cùng đến sân bay O thì MN là lớn nhất trong các cạnh của tam giác MON, do đó $\widehat{MON} > 60^o$.

Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ đến sân bay O thì tổng các góc ở tâm O bằng 360^o. Vậy $\dfrac{360^o}{n} > 60^0 \Leftrightarrow n < 6$.

Vậy trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá năm máy bay đến.

Bài 1.19 (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 1992 - 1993 bảng B).

Trong ΔABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kì. Chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn hai lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Vì ΔABC có ba góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong đoạn BC, CA, AB.

Nối PA, PB, PC ta có $\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^0$.

Cho nên góc lớn nhất trong sáu góc này sẽ lớn hơn hoặc bằng 60^0.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{APC_1}$ là lớn nhất, khi đó $\widehat{APC_1} \geq 60^0$.

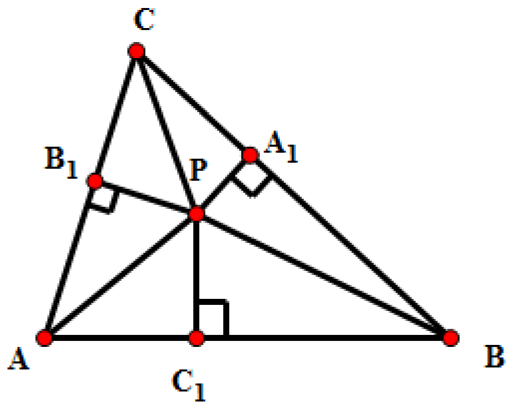
Xét ΔAPC_1 vuông tại C_1, ta có

$\dfrac{PC_1}{AP} = \cos\widehat{APC_1} \leq \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó AP$\geq 2PC_1$.

Như vậy

$Max\{PA, PB, PC\} \geq 2PC_1$
$\geq \min\{PA_1, PB_1, PC_1\}$.



hình 9

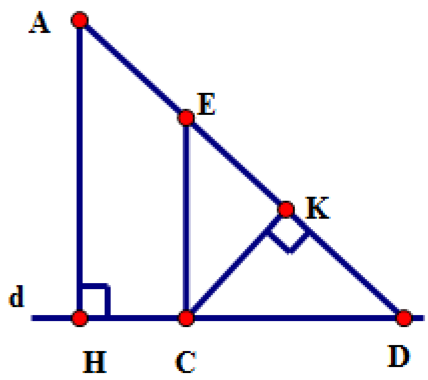
Bài 1.20. Cho tập hợp M gồm 10 điểm trên mặt phẳng không cùng thuộc một đường thẳng. Kẻ các đường thẳng đi qua từng cặp hai điểm trong 10 điểm đó. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm của tập hợp M.

Lời giải

Xét các khoảng cách khác 0 từ mỗi điểm của tập hợp M đến tất cả các đường thẳng được kẻ. Vì số điểm là hữu hạn nên số khoảng cách cũng hữu hạn, ta chọn ra khoảng cách nhỏ nhất.

Giả sử khoảng cách nhỏ nhất đó là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d. Ta sẽ chứng minh d là đường thẳng cần tìm tức là d chỉ chứa đúng hai điểm của tập hợp M.

Giả sử đường thẳng d chứa thêm điểm thứ ba của tập M. Gọi ba điểm của tập M mà đường thẳng d đi qua là B,C,D. Kẻ $AH \perp d$. Tồn tại một trong hai tia gốc H chứa hai điểm, chẳng hạn đó là C và D. Không mất tính tổng quát, giả sử $HC < HD$.



hình 10

Kẻ $CK \perp AD$.

Khi đó $CK < AH$.

Điều này chứng tỏ khoảng cách từ C đến AD nhỏ hơn khoảng cách từ A đến đường thẳng d. Vậy điều giả sử là sai tức là d chỉ chứa đúng hai điểm của tập hợp M.

Nhận xét

- Bài toán trên có thể thay 10 điểm bởi số điểm lớn hơn 3.
- Nguyên lí cực hạn được sử dụng để chọn ra khoảng cách nhỏ nhất trong một số hữu hạn các khoảng cách từ một điểm đã cho đến một đường thẳng đi qua hai điểm đã cho.
- Nguyên lí cực hạn được sử dụng phối hợp với phương pháp phản chứng.

- Bài toán trên do nhà toán học Anh - Sylvester nêu lên cuối thế kỉ 19, gần nửa thế kỉ sau mới có lời giải.

1.3. Phương pháp đồ thị, tô màu

Bài 1.21. Cho sáu điểm trong đó ba điểm nào cũng được nối với nhau thành một tam giác có cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải. Xét A là một trong sáu điểm đã cho. Năm đoạn thẳng nối A với năm điểm còn lại được tô bởi hai màu nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại ba đoạn thẳng cùng màu. Không mất tính tổng quát, giả sử ba đoạn thẳng đó là AB, AC, AD. Có hai trường hợp.

TH1. AB, AC, AD cùng tô màu đỏ. Xét ΔBCD.

Nếu tồn tại một cạnh của tam giác được tô màu đỏ, chẳng hạn BC thì ΔABC có ba cạnh cùng màu đỏ.

Nếu không có cạnh nào tô màu đỏ tức là cả ba cạnh của ΔBCD được tô màu xanh.

TH2. AB, AC, AD cùng tô màu xanh. Ta chứng minh hoàn toàn tương tự như TH1.

Phức tạp hơn ta có bài tập sau

Bài 1.22. Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được bởi một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.

Lời giải.

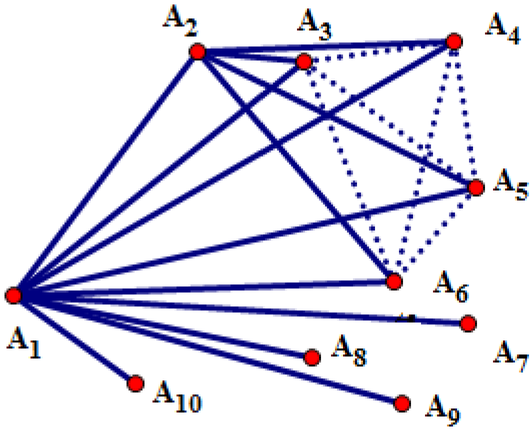
Giả sử $A_i (i = \overline{1,18})$ là 18 điểm đã cho. Xuất phát từ điểm A_1 có 17 đoạn thẳng $A_1A_i (i = \overline{2,18})$. 17 đoạn thẳng đó chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại ít nhất chín đoạn thẳng cùng màu. Không giảm tính tổng quát giả sử đó là các đoạn thẳng $A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_{10}$ và chúng cùng màu đỏ.

Xét mười điểm $A_1, A_2, ..., A_{10}$ chỉ có thể xảy ra hai trường hợp sau

TH1. Tồn tại điểm $A_j (2 \le j \le 10)$ sao cho trong tám đoạn thẳng

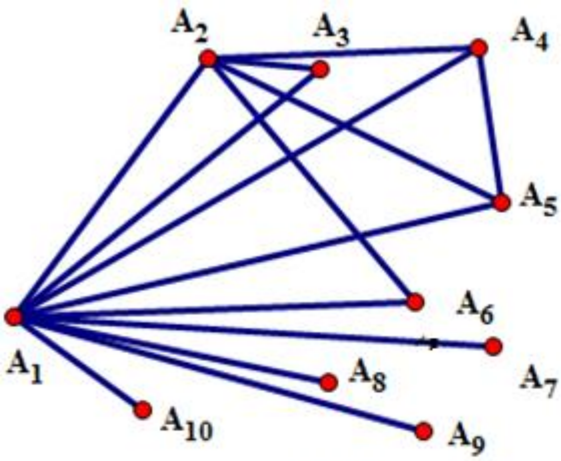
$A_jA_k (2 \le k \le 10, k \ne j)$ có ít nhất bốn đoạn màu đỏ. Không mất tính tổng quát có thể cho là $A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_2A_6$ màu đỏ. Đến đây lại chỉ còn hai khả năng.

+ Hoặc là mọi đoạn thẳng $A_3A_4, A_3A_5, A_3A_6, A_4A_5, A_4A_6, A_5A_6$ đều màu xanh. Khi đó $A_3A_4A_5A_6$ là tứ giác xanh thỏa mãn bài toán (hình 22).



hình 22

+ Tồn tại một đoạn thẳng $A_iA_j (3 \le i < j \le 6)$ màu đỏ. Khi đó $A_1A_2A_iA_j$ $(3 \le i < j \le 6)$ là tứ giác đỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán (hình 23).



hình 23

TH2. Với mọi $A_j (2 \le j \le 10)$, thì trong tám đoạn thẳng $A_j A_k \ (2 \le k \le 10, k \ne j)$ có tối đa ba đoạn màu đỏ. Khi đó, tồn tại một điểm (chẳng hạn A_2) mà trong các đoạn thẳng $A_2 A_k (3 \le k \le 10, k \ne j)$ có tối đa hai đoạn màu đỏ. Thật vậy, nếu với mọi $A_j (2 \le j \le 10)$ mà có đúng ba đoạn $A_j A_k (2 \le k \le 10, k \ne j)$ màu đỏ, thì số đoạn thẳng màu đỏ nối trong nội bộ chín điểm đó là $\frac{9.3}{2}$ là số nguyên. Vô lí.

Vì $A_2 A_k (3 \le k \le 10, k \ne j)$ có tối đa hai đoạn màu đỏ nên trong số các đoạn $A_2 A_3, A_2 A_4, A_2 A_5, ..., A_2 A_{10}$ có ít nhất sáu đoạn màu xanh. Không mất tính tổng quát ta cho $A_2 A_5, A_2 A_6, ..., A_2 A_{10}$ màu xanh.

Xét sáu điểm $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$. Đó là sáu điểm mà trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, và mỗi đoạn thẳng nối hai điểm chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ. Theo ví dụ trên thì luôn luôn tồn tại ít nhất một tam giác mà ba đỉnh chọn trong $\{A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$ sao cho ba cạnh cùng màu.

Lại có hai khả năng

✓ Giả sử tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k (5 \le i < j < k \le 10)$ màu xanh. Khi đó tứ giác $A_2 A_i A_j A_k \ (5 \le i < j < k \le 10)$ là tứ giác xanh thỏa mãn yêu cầu đề bài.

✓ Nếu tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k (5 \le i < j < k \le 10)$ màu đỏ, thì $A_1 A_i A_j A_k$ là tứ giác cần tìm.

Như vậy ta luôn chứng minh được tồn tại một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong 18 điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo cùng màu.

Tương tự như hai bài tập trên ta có bài tập phức tạp hơn như sau.

Bài 1.23. Cho sáu điểm trong đó ba điểm nào cũng được nối với nhau thành một tam giác có cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại hai tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải. Số tam giác tạo thành từ sáu điểm đã cho là $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$ (tam giác).

Gọi a là số các tam giác mà ba cạnh cùng màu (gọi là tam giác đồng màu), khi đó số các tam giác mà ba cạnh không cùng màu sẽ là $20-a$.

Nếu hai đường cùng màu xuất phát từ một điểm thì ta có một góc đồng màu.

Trong mỗi tam giác đồng màu ta có ba góc đồng màu, còn trong tam giác không đồng màu chỉ có đúng một góc đồng màu.

Vì thế số góc đồng màu là

$$3a+20-a=20+2a \text{ (góc).} \qquad (2)$$

Xét tại điểm A_1. Giả sử xuất phát từ A_1 có r đoạn thẳng màu đỏ và $5-r$ đoạn thẳng màu xanh. Khi đó có thể thấy ngay tại điểm A_1 số góc đồng màu là

$$C_r^2+C_{5-r}^2.$$

(Ở đây ta quy ước sử dụng kí hiệu $C_n^k=0$ nếu $0\le n<k$.)

Nếu $0\le r\le 1$ thì $C_r^2=0$, còn $5-r\ge 4$ thì $C_{5-r}^2\ge C_4^2=6$.

Nếu $0\le 5-r\le 1$ thì $C_{5-r}^2=0$. Mà $r\ge 4$ nên $C_r^2\ge C_4^2=6$.

Nếu $2\le r\le 3$ thì $C_r^2+C_{5-r}^2=4$.

Như vậy ta luôn có $C_r^2+C_{5-r}^2\ge 4$. Điều đó có nghĩa là tại mỗi điểm $A_i (i=\overline{1,6})$, số góc đồng màu có đỉnh tại A_i luôn lớn hơn hoặc bằng 4.

Kết hợp với (2) ta có $20+2a\ge 6.4 \Leftrightarrow a\ge 2$.

Vậy luôn luôn tồn tại ít nhất hai tam giác cùng màu (đỉnh của các tam giác này thuộc vào tập sáu điểm đã cho).

Bài 1.24. Cho một đường tròn, kẻ một số dây của đường tròn. Biết rằng mỗi đường kính cắt không quá một dây, chứng minh rằng tổng độ dài các dây được kẻ nhỏ hơn nửa chu vi đường tròn.

Lời giải

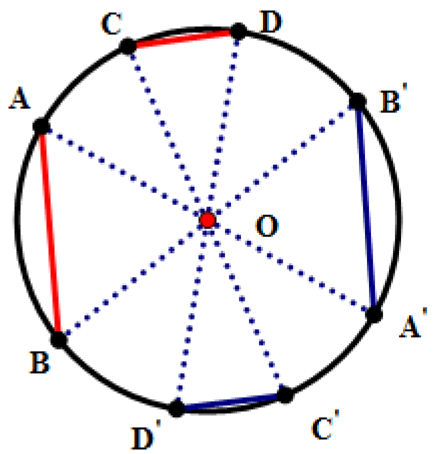
Do tính đối xứng của đường tròn nên ta thấy một đường kính cắt dây AB khi và chỉ khi nó cắt dây $A'B'$ đối xứng với dây AB qua tâm (hình 24).

Ta tô đỏ các dây đã cho và tô xanh các dây đối xứng với các dây đó qua tâm O. Ta nhận thấy

+ Hai dây đỏ không có điểm chung vì mỗi đường kính cắt không quá một dây.

+ Hai dây xanh cũng không có điểm chung do tính đối xứng.

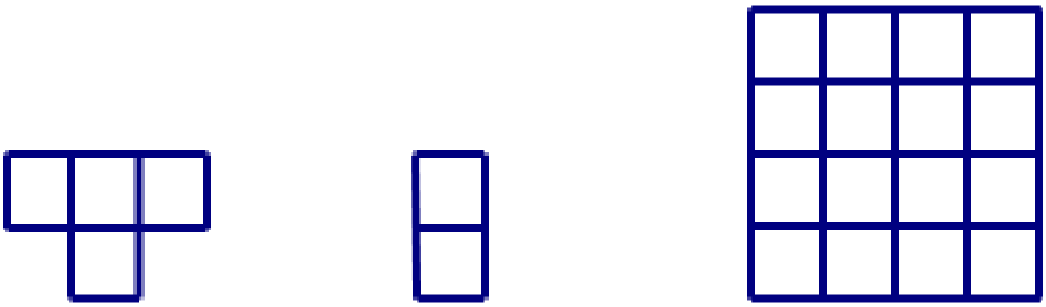
+ Hai dây xanh và đỏ cũng không có điểm chung.



hình 24

Như vậy tổng độ dài các cung được chắn bởi dây màu đỏ nhỏ hơn nửa chu vi đường tròn. Do đó tổng độ dài các dây được kẻ nhỏ hơn nửa chu vi đường tròn.

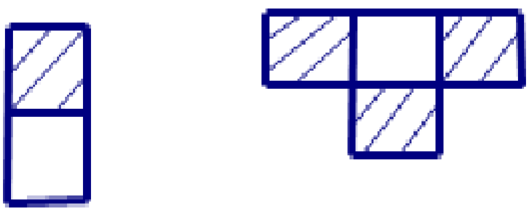
Bài 1.25. Chứng minh rằng không thể dùng ba hình chữ T (gồm bốn ô vuông) và hai hình chữ I (gồm hai ô vuông) để xếp khít một hình vuông 4×4 gồm 16 ô vuông (hình 25).



hình 25

Lời giải. Ta tô màu các ô vuông của hình vuông 4×4 bởi các màu đen trắng xen kẽ, ta được tám ô đen và tám ô trắng.

Ta cũng tô màu các ô vuông của hình chữ I và chữ T bởi các màu đen trắng xen kẽ. Ta thấy mỗi hình chữ I lấp một ô đen và một ô trắng. Mỗi hình chữ T lấp ba ô đen và một ô trắng, hoặc một ô đen và ba ô trắng (hình 26).



hình 26

Vậy ba hình chữ T lấp một số lẻ ô đen, hai hình chữ I lấp một số chẵn ô đen. Tổng hợp lại ta có một số lẻ ô đen nên không thể lấp được tám ô đen của hình vuông đã cho.

Như vậy không thể dùng hai hình chữ I và ba hình chữ T để xếp khít một hình vuông gồm 16 ô vuông.

Nhận xét. Nếu cứ tìm cách ghép các hình chữ I và chữ T vào ô vuông thì rất khó. Cách tô màu các ô của ba hình trên đã giúp chúng ta giải quyết bài toán một cách dễ dàng. Ở đây cũng dùng cả phương pháp đối xứng và xét tính chẵn lẻ. Nếu không sử dụng đến tính chẵn, lẻ thì có thể đếm nhưng sẽ tốn thời gian hơn.

Bài 1.26. Chứng minh rằng từ sáu số vô tỉ tùy ý có thể chọn ra được ba số (ta gọi ba số đó là a,b,c) sao cho $a+b,b+c,c+a$ cũng là số vô tỉ.

Lời giải. Xét trên mặt phẳng sáu điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi điểm ta sẽ gắn cho nó một số vô tỉ. Như vậy sáu điểm được gắn sáu số vô tỉ đã cho. Hai điểm mang số a và b sẽ được nối với nhau bằng một đoạn thẳng màu đỏ nếu $a+b$ là số vô tỉ, còn sẽ có màu xanh khi $a+b$ là số hữu tỉ.

Theo **Bài 1.34**, tồn tại ít nhất một tam giác có các cạnh cùng màu. Giả sử tam giác đó có ba đỉnh được gắn số a,b,c. Chỉ có hai khả năng xảy ra

Nếu tam giác đó là tam giác có các cạnh màu xanh. Khi ấy $a+b,b+c,c+a$ là ba số hữu tỉ. Lúc này $(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b$ cũng là một số hữu tỉ. Điều này vô lí vì b là số vô tỉ.

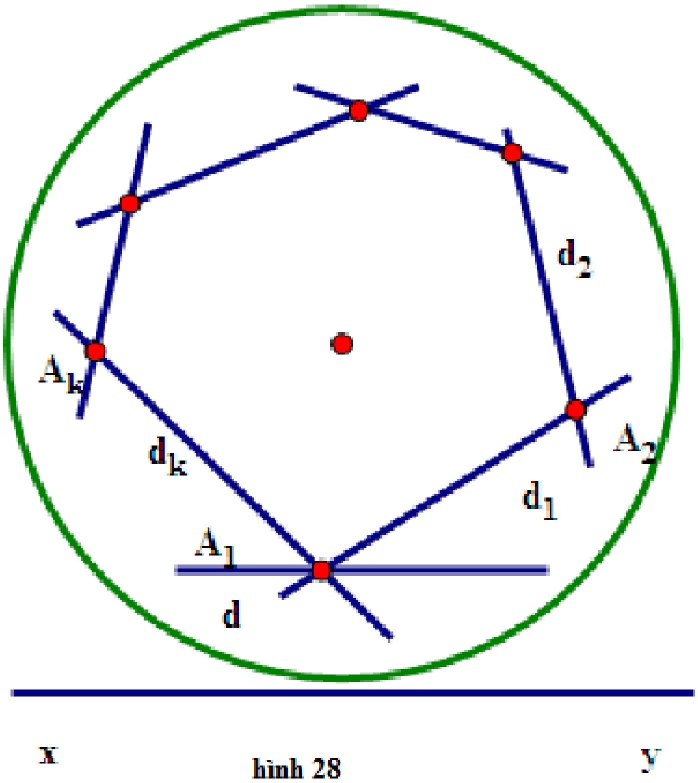
Nếu tam giác đó là tam giác có các cạnh màu đỏ. Khi ấy $a+b,b+c,c+a$ là ba số vô tỉ. Điều phải chứng minh.

1.4. Phương pháp tạo đa giác bao

Bài 1.27. (bổ đề về đa giác bao) Cho n điểm không cùng thuộc một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đa giác lồi có mỗi đỉnh là một trong n điểm đã cho, sao cho các điểm còn lại không nằm ngoài đa giác.

Lời giải. Vì số điểm đã cho n là hữu hạn nên tồn tại một đường tròn có bán kính đủ lớn chứa tất cả n điểm. Lấy đường thẳng xy nằm ngoài đường tròn. Gọi A_1 là điểm gần xy nhất (nếu có nhiều điểm có cùng khoảng cách ngắn nhất đến xy thì chọn A_1 là điểm cuối cùng ở phía bên phải).

Qua A_1 kẻ đường thẳng d song song với xy.



hình 28

Quay đường thẳng d quanh A_1 ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi gặp một điểm đã cho ta được đường thẳng d_1. Gọi điểm vừa gặp là A_2 (nếu có nhiều điểm thuộc d_1 thì chọn A_2 là điểm xa A_1 nhất).

Quay d_1 quanh A_2 như cách làm trên, ta được các đường thẳng $d_2, \ldots,$ cho đến khi được đường thẳng đi qua A_1, gọi là đường thẳng d_k. Ta nhận được đa giác lồi $A_1A_2...A_k$ thỏa mãn đề bài, hình 28.

Nhận xét

Ta gọi đa giác lồi $A_1A_2...A_k$ tạo thành theo cách trên là đa giác bao n điểm đã cho.

Bài 1.28 (bổ đề về góc bao). Cho n điểm không cùng thuộc một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một góc nhỏ hơn góc bẹt có đỉnh là một trong n điểm đã cho sao cho các điểm còn lại không thuộc miền ngoài của góc đó.

Nhận xét. Lập luận như **Bài 1.44,** ta được góc $A_2A_1A_k$ là góc thỏa mãn.

Ta gọi góc tạo thành theo cách trên là góc bao n điểm đã cho.

Bài 1.29. Trên mặt phẳng cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong năm điểm đã cho là ba đỉnh của một tam giác có một góc

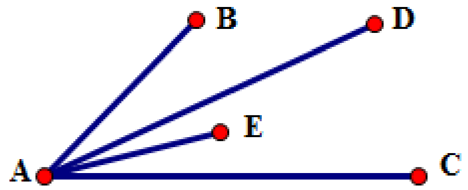
a) Nhỏ hơn hoặc bằng 36^0.

b) Lớn hơn hoặc bằng 108^0.

Lời giải

a) (sử dụng bổ đề về góc bao)

Theo bổ đề về góc bao, tồn tại ba điểm A,B,C trong năm điểm đã cho sao cho hai điểm còn lại D,E nằm bên trong góc $\widehat{BAC}$.



hình 29

TH1. $\widehat{BAC} \le 108^0$ (hình 29). Khi đó, một trong ba góc $\widehat{BAD}, \widehat{DAE}, \widehat{EAC} \le \frac{108^0}{3} = 36^0$.

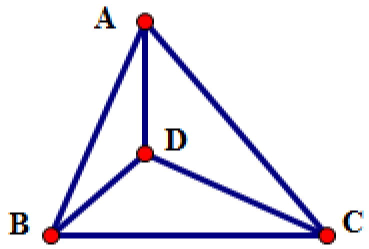
TH2. $\widehat{BAC} > 108^0$, thì $\widehat{B} + \widehat{C} < 72^0$. Do đó một trong hai góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ nhỏ hơn 36^0.

b) (Sử dụng bổ đề đa giác bao)

Theo bổ đề về đa giác bao, tồn tại đa giác bao năm điểm đã cho.

TH1. Đa giác bao là tam giác. Tồn tại điểm đã cho D nằm trong ΔABC.

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^0$. Nên một trong các góc $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$ lớn hơn hoặc bằng $120^0 > 108^0$ (hình 30).



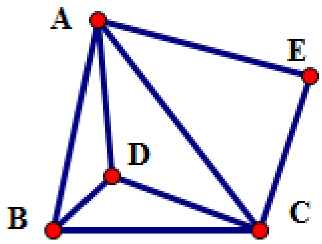
hình 30

TH2. Đa giác bao là tứ giác.

Giả sử tứ giác bao là $ABCE$.

Xét ΔABC chứa điểm thứ năm là D. Tương tự như trong TH1, ta có

$\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$ lớn hơn hoặc bằng $120^0 > 108^0$ (hình 31).

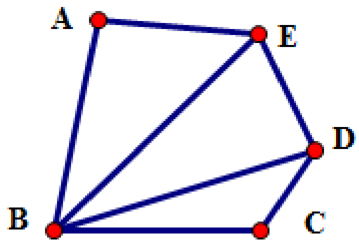


hình 31

TH3. Đa giác bao là ngũ giác (hình 32).

Tổng các góc của ngũ giác bằng $(5-2)180^0 = 540^0$. Khi đó, tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $540^0 : 5 = 108^0$.

Ta có điều phải chứng minh.



hình 32

Bài 1.31. Chứng minh rằng trong năm điểm bất kì trên mặt phẳng mà ba trong chúng không thẳng hàng luôn tồn tại bốn điểm lập thành một tứ giác lồi.

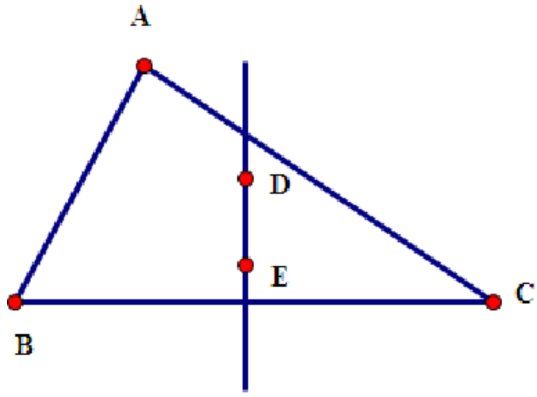
Lời giải. Sử dụng bổ đề về đa giác bao ta có các trường hợp sau

TH1. Đa giác bao năm điểm đã cho là ngũ giác lồi $ABCDE$. Như vậy bốn điểm bất kì đều lập thành một tứ giác lồi.

TH2. Đa giác bao là tứ giác lồi $ABCD$, điểm E nằm trong tứ giác. Điều này hiển nhiên.

TH3. Đa giác bao là ΔABC, hai điểm D, E nằm trong ΔABC (hình 33).

Trong ba điểm A, B, C, tồn tại hai điểm nằm về cùng một phía bờ DE. Giả sử A và B nằm về cùng một phía khác với C, bờ là đường thẳng DE. Khi đó A, B, D, E lập thành một tứ giác lồi.



hình 33

Bài 1.32. Trên mặt phẳng cho bảy điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong bảy điểm đã cho là ba đỉnh của một tam giác có một góc

a) Nhỏ hơn 36^0.

b) Nhỏ hơn hoặc bằng 26^0.

Lời giải

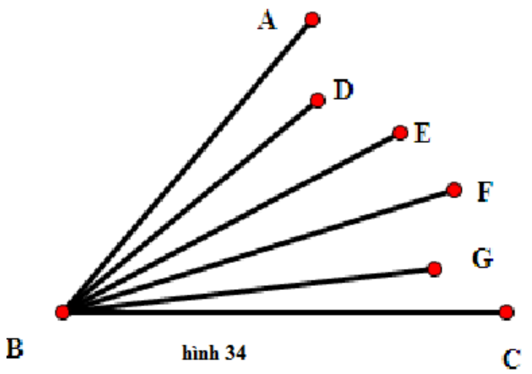
Theo bổ đề về góc bao, tồn tại ba điểm A, B, C trong bảy điểm đã cho sao cho bốn điểm còn lại D, E, F, G nằm bên trong góc $\widehat{ABC}$.

a) $\widehat{ABC} < 180^0$ (hình 34).

Khi đó, một trong năm góc

$\widehat{ABD}, \widehat{DBE}, \widehat{EBF}, \widehat{FBG}, \widehat{GBC} \le \dfrac{180^0}{5} = 36^0$.

Ta có điều phải chứng minh.



hình 34

b) Nếu $\widehat{ABC} \le 130^0$. Khi đó, một trong năm góc $\widehat{ABD}, \widehat{DBE}, \widehat{EBF}, \widehat{FBG}, \widehat{GBC}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\dfrac{130^0}{5} = 26^0$. Nếu $\widehat{ABC} > 130^0$ thì $\widehat{B} + \widehat{C} < 50^0$.

Do đó một trong hai góc $\widehat{B}, \widehat{C}$ nhỏ hơn 25^0. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 1.33. Tồn tại hay không năm điểm trên mặt phẳng sao cho bất kì ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác nhọn?

Hướng dẫn giải

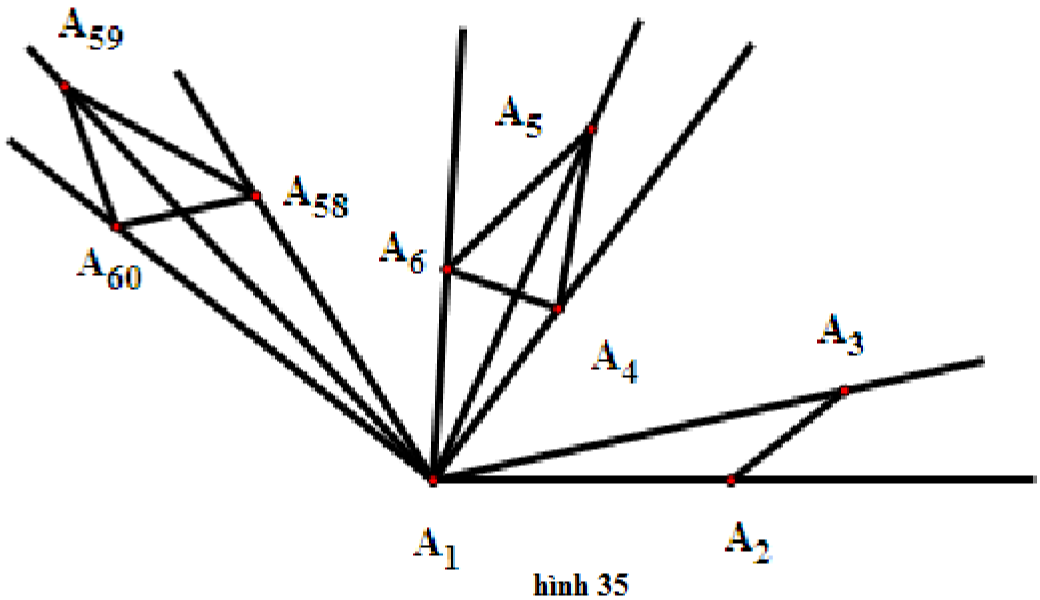
Tương tự như **Bài 1.46**. Sử dụng bổ đề về đa giác bao, ta chứng minh tồn tại ba điểm trong năm điểm đó tạo thành một tam giác tù.

Như vậy không tồn tại năm điểm trên mặt phẳng sao cho bất kì ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác nhọn.

Bài 1.34. Cho 60 điểm trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể vẽ được 60 tam giác không giao nhau có các đỉnh là các điểm đã cho.

Lời giải

Theo bổ đề về góc bao ta có góc $\widehat{A_2A_1A_{60}}$ chứa 57 điểm bên trong. Khi đó ta có 20 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\Delta A_2A_1A_3, \Delta A_4A_5A_6, ..., \Delta A_{58}A_{59}A_{60}$.

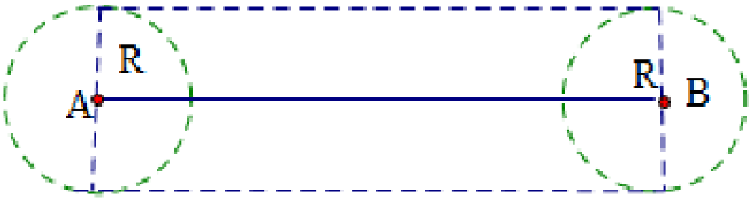


hình 35

1.5. Phương pháp mở rộng, thu nhỏ một hình

- Mở rộng điểm O về mọi phía độ dài R ta được hình tròn $(O;R)$.

- Mở rộng hình tròn $(O;R)$ về mọi phía độ dài r ta được hình tròn $(O;R+r)$.
- Mở rộng đoạn thẳng AB về mọi phía độ dài R ta được hình chữ nhật có kích thước $AB\times 2R$ và hai nửa hình tròn bán kính R (hình 36).



hình 36

- Mở rộng hình chữ nhật kích thước $a\times b$ về mỗi phía c ta được hình chữ nhật kích thước $(a+c)\times(b+c)$.

• Tóm lại ta gọi hình H và phần mở rộng của nó là lân cận bán kính R của hình H. Như vậy lân cận bán kính R của một hình phẳng là tập hợp các điểm trên mặt phẳng có khoảng cách đến hình đó không quá R (ta gọi khoảng cách từ một điểm đến một hình đã cho là khoảng cách nhỏ nhất trong các khoảng cách từ điểm đó đến một điểm bất kì của hình).

Nói cách khác, với mọi điểm M thuộc lân cận bán kính R của hình H, tồn tại một điểm A của hình H sao cho $MA\le R$. Do đó, trong trường hợp cần tìm một điểm có khoảng cách đến mọi điểm của hình H lớn hơn R, ta chọn điểm ấy nằm ngoài lân cận bán kính R của hình H.

Bài 1.35. Bên trong một hình vuông có cạnh 16, đặt 12 tấm bìa hình vuông cạnh 2. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính 1 nằm trong hình vuông mà không chờm lên một tấm bìa nào.

Lời giải

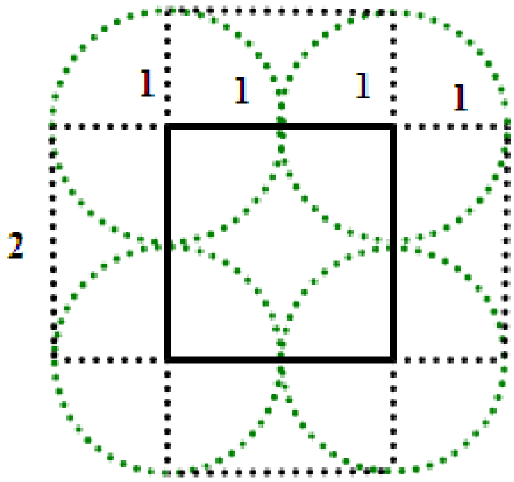
Diện tích lân cận bán kính 1 của một tấm bìa hình vuông cạnh 2 là

$2.2+2.1.4+\pi.1^2=12+\pi$.

Gọi diện tích hợp của 12 lân cận là S_1 thì

$S_1\le(12+\pi).12<15,2.12=182,4$.

Thu nhỏ hình vuông cạnh 16 thành hình vuông đồng tâm cạnh 14 và có diện tích là $S = 14.14 = 196$.



hình 37

Vì $S_1 < S$ nên các lân cận chưa phủ kín hình vuông đã thu hẹp. Do đó tồn tại một điểm, giả sử là điểm O nằm trong hình vuông thu nhỏ và nằm ngoài các lân cận.

Vẽ hình tròn $(O;1)$, hình tròn này nằm trong hình vuông ban đầu và không chờm lên một tấm bìa hình vuông nhỏ nào.

Bài 1.36. Bên trong một hình chữ nhật có kích thước 8×9, đặt 5 tấm bìa hình vuông cạnh 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính 1 nằm trong hình hình chữ nhật mà không chờm lên một tấm bìa nào.

Lời giải

Diện tích lân cận bán kính 1 của một tấm bìa hình vuông cạnh 1 là

$$1.1 + 1.1.4 + \pi.1^2 = 5 + \pi.$$

Gọi diện tích hợp của 5 lân cận là S_1 thì $S_1 \le (5+\pi).5 < 8,2.5 = 41$.

Thu nhỏ hình chữ nhật có cạnh 8×9, thành hình chữ nhật đồng tâm cạnh 6×7 và có diện tích là $S = 6.7 = 42$.

Vì $S_1 < S$ nên các lân cận chưa phủ kín hình chữ nhật đã thu hẹp. Do đó tồn tại một điểm, giả sử là điểm O nằm trong hình chữ nhật thu nhỏ và nằm ngoài các lân cận.

Vẽ hình tròn $(O;1)$, hình tròn này nằm trong hình chữ nhật ban đầu và không chờm lên một tấm bìa hình vuông nhỏ nào.

Chương 2

Một số dạng toán hình học tổ hợp thường gặp

2.1. Hệ điểm và đường thẳng

Yêu cầu của các bài toán này thường là xét xem một hệ điểm hay đường thẳng có tính chất nào đó không. Với các bài toán này, ta sử dụng phương pháp phản chứng, nguyên lí cực hạn, nguyên lí Đirichlê để giải quyết, cụ thể như trong các bài tập sau.

Bài 2.1. Cho 15 điểm trên mặt phẳng sao cho bất kì bốn điểm nào cũng có ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong 15 điểm đó để 14 điểm còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải

TH1. 15 điểm cùng thuộc một đường thẳng thì bài toán được chứng minh.

TH2. 15 điểm không cùng thuộc một đường thẳng.

Ta chọn ra bốn điểm A, B, C, D mà D nằm ngoài đường thẳng d chứa A, B, C.

Ta sẽ chứng minh 11 điểm còn lại thuộc d.

Ta dùng phương pháp phản chứng.

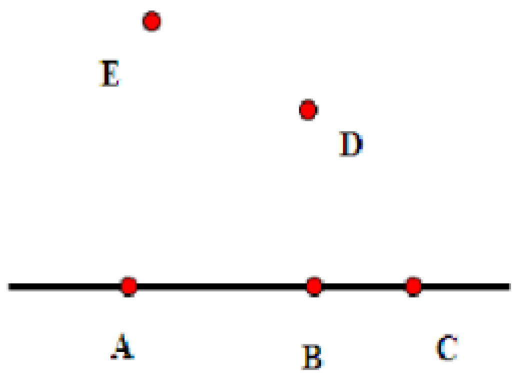
Giả sử trong 11 điểm còn lại, tồn tại điểm E không thuộc d (hình 44).

Xét bốn điểm A, B, E, D có

+ A, B, D không thẳng hàng.

+ A, B, E không thẳng hàng.

Nên A, E, D thẳng hàng hoặc B, E, D thẳng hàng.



hình 44

✓ **Khả năng 1.** A, E, D thẳng hàng thì bai điểm B, E, D không thẳng hàng; ba điểm C, E, D cũng không thẳng hàng. Do đó bốn điểm B, C, E, D không có ba điểm nào thẳng hàng. Điều này trái với giả thiết.

✓ **Khả năng 2.** B, E, D thẳng hàng thì bốn điểm A, C, D, E không có ba điểm nào thẳng hàng. Trái với giả thiết.

Vậy cả 11 điểm còn lại cũng thuộc d. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.2. Tồn tại hay không bảy điểm trên mặt phẳng sao cho mỗi điểm có thể nối được với đúng ba điểm khác bởi đúng ba đoạn thẳng khác nhau?

Lời giải

Không tồn tại bảy điểm trên mặt phẳng sao cho mỗi điểm có thể nối được với đúng ba điểm khác bởi đúng ba đoạn thẳng khác nhau.

Giả sử có bảy điểm mà mỗi điểm có thể nối được với đúng ba điểm khác bởi đúng ba đoạn thẳng khác nhau thì số đoạn thẳng là $\frac{7.3}{2} \notin ¥$.

Điều này vô lí. Vậy không tồn tại bảy điểm thỏa mãn đề bài.

Tổng quát

Không tồn tại một số lẻ điểm mà mỗi điểm có thể nối được với đúng ba điểm khác bởi đúng ba đoạn thẳng khác nhau.

Bài 2.3. Cho tập hợp A gồm 20 điểm, trong đó có một số cặp điểm được nối với nhau bởi đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong 20 điểm ấy, tồn tại hai điểm được nối đến các điểm khác bởi cùng một số đoạn thẳng như nhau.

Lời giải

Giả sử điểm M thuộc tập hợp A, $S(M)$ là số điểm khác được nối với M. Khi đó $0 \le S(M) \le 19$.

Mặt khác sẽ không tồn tại hai điểm M, N cùng thuộc A mà $S(M) = 0$ và $S(N) = 19$ vì nếu $S(N) = 19$ tức N được nối với 19 điểm còn lại, chứng tỏ $S(M) \ge 1$.

Như vậy có tối đa 19 giá trị cho $S(M)$. Mà có 20 điểm như vậy nên tồn tại ít nhất hai điểm được nối với cùng một số lượng điểm thuộc A. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.4. Cho một đa giác lồi có 22 cạnh. Tại mỗi đỉnh của đa giác, viết một số tự nhiên nhỏ hơn 200. Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của đa giác sao cho hiệu hai số viết ở hai đầu đường chéo là bằng nhau.

Lời giải

Số đường chéo của đa giác là $\dfrac{22(22-3)}{2} = 209$.

Hiệu hai số ở hai đầu đường chéo có giá trị nhỏ nhất là 0, lớn nhất là 200. Vậy có tất cả 201 hiệu, mà có 209 đường chéo nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại hai đường chéo có hiệu hai số viết ở hai đầu đường chéo là bằng nhau.

Bài 2.5. Cho một đa giác đều có 2016 cạnh. Tại mỗi đỉnh của đa giác, viết một trong số các số $1, 2, 3, ..., 1007$. Chứng minh rằng tồn tại bốn đỉnh A, B, C, D của đa giác mà $AB = a$ và $a + b = c + d$ (kí hiệu a, b, c, d là các số được viết tương ứng tại các đỉnh A, B, C, D).

Lời giải

Xét đường tròn (O) ngoại tiếp đa giác đều có 2016 cạnh đã cho.

Số đường kính là đường chéo của đa giác là 1008.

Hiệu của hai số ở hai đầu mỗi đường kính có giá trị nhỏ nhất là 0 và lớn nhất là 1006.

Vậy có 1008 đường kính, có 1007 hiệu nên tồn tại hai đường kính có hiệu hai số ở hai đầu bằng nhau.

Giả sử hai đường kính đó là AC và BD. Ta có $|a-c|=|b-d|$.

Giả sử $a \ge c, d \ge b$ thì $a-c=d-b \Leftrightarrow a+b=c+d$. Điều phải chứng minh.

2.1. Điểm nằm trong một hình

Bài 2.6. Bên trong một hình tròn có bán kính 3, cho bảy điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong bảy điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 3.

Lời giải

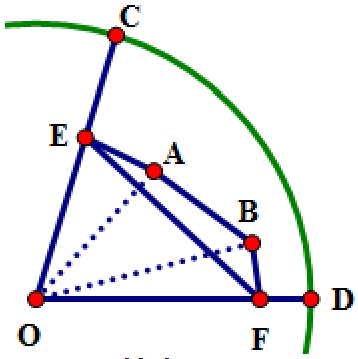
Chia hình tròn tâm O thành sáu hình quạt bằng nhau. Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại hai điểm đã cho thuộc cùng một hình quạt. Giả sử A và B thuộc hình quạt COD (A và B không thuộc cung hình quạt).

TH1. A hoặc B trùng O. Ta có điều phải chứng minh.

TH2. Cả A và B không trùng O.

Trên OC lấy điểm E sao cho $OE=OA$.

Trên OD lấy điểm F sao cho $OF=OB$, hình 53.



hình 53

Cho nên $AB \le EF$ (hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau). (3)

Xét ΔOEF có $\widehat{O} = 60^0$ nên một trong hai góc $\widehat{E}, \widehat{F}$ lớn hơn hoặc bằng 60^0.

Giả sử $\widehat{E} \geq 60^0$.

Từ đó ta có $\widehat{O} \leq \widehat{E}$.

Do đó $\mathrm{EF} \leq OF < OD$. (4)

Từ (3) và (4) ta có

$$AB \leq \mathrm{EF} < OD = 3.$$

Nên $AB < 3$. Điều phải chứng minh.

Bài 2.7. Bên trong một hình tròn bán kính 3, cho sáu điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong sáu điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 3.

Nhận xét

Như bài trên nhưng giảm số điểm đi. Nếu giải bài toán theo cách của **Bài 2.18**, chia hình tròn thành năm hình quạt bằng nhau để tồn tại hai hình quạt chứa hai điểm thì mỗi hình quạt có góc ở tâm là $360^0 : 5 = 72^0$.

Trong hình quạt này tồn tại hai điểm có khoảng cách lớn hơn bán kính là 3 nên bài toán chưa được giải quyết. Ta phải tìm cách khác để giải quyết bài này.

Lời giải

TH1. Trong sáu điểm đã cho, tồn tại một điểm là tâm đường tròn. Khi đó bất kì điểm nào trong năm điểm còn lại cũng cách tâm một khoảng cách nhỏ hơn 3.

TH2. Tất cả sáu điểm đã cho không trùng tâm.

+ Nếu có hai điểm thuộc cùng một bán kính thì khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 3.

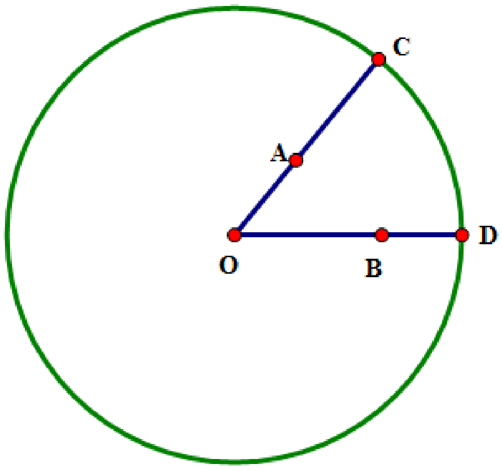
+ Nếu không có hai điểm nào thuộc cùng một bán kính, ta vẽ các bán kính đi qua sáu điểm đã cho. Có sáu bán kính, tồn tại hai bán kính tạo với nhau một góc không quá 60^0. Giả sử đó là các bán kính OC, OD theo thứ thự đi qua hai điểm đã cho A và B, hình 54.

Xét ΔOAB có $\widehat{O} \le 60^0$ nên một trong hai góc $\widehat{A}, \widehat{B}$ lớn hơn hoặc bằng 60^0. Chẳng hạn $\widehat{A} \ge 60^0$.

Do đó $\widehat{O} \le \widehat{A}$.

Nên $AB \le OB < OD = 3$.

Vậy $AB < 3$. Điều phải chứng minh.



hình 54

- Khi khoảng cách cần chứng minh nhỏ hơn bán kính thì cả hai cách trên đều không giải quyết được ngay, đòi hỏi ta phải sử dụng thêm phương pháp mở rộng hình như bài tập sau.

Bài 2.8. Bên trong một hình tròn bán kính 7, cho 12 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong 12 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 6.

Lời giải

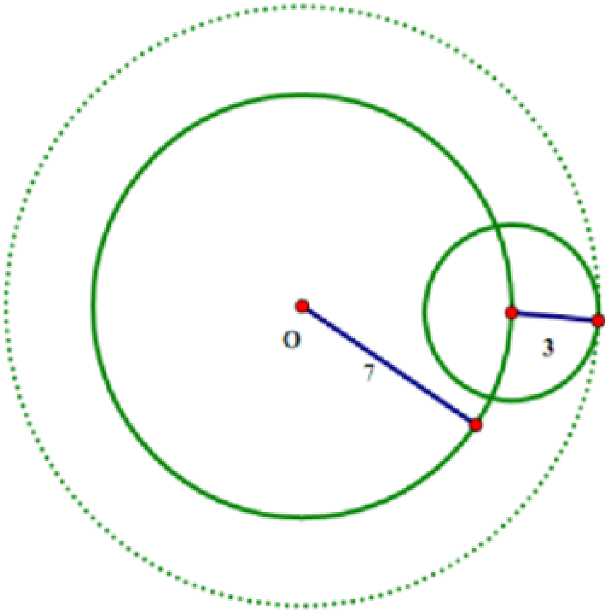
Giả sử bất kì hai điểm nào trong 12 điểm đã cho cũng có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng 6.

Ta sẽ chỉ ra mâu thuẫn.

Vì khoảng cách giữa hai điểm đã cho nào cũng lớn hơn hoặc bằng 6 nên nếu vẽ 12 đường tròn bán kính 3 có tâm là 12 điểm đã cho thì chúng nằm ngoài hoặc tiếp xúc ngoài và đều nằm trong hình tròn tâm O bán kính $7+3=10$.

Như vậy $12\pi.3^2 < \pi.10^2 \Leftrightarrow 108\pi < 100\pi$. Điều này vô lí.

Nên tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 6.



hình 55

Bài 2.9. Bên trong một hình tròn bán kính 7, cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong 10 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 6.

Nhận xét

Cách giải như **Bài 2.7** không áp dụng được cho bài này vì

$10\pi.3^2 < \pi.10^2 \Leftrightarrow 90\pi < 100\pi$ không dẫn đến vô lí.

Nếu chia hình tròn tâm O thành chín phần bằng nhau như **Bài 2.8** thì tồn tại một phần chứa hai điểm. Nhưng mỗi hình quạt "dài quá" (bán kính là 7, tồn tại hai điểm của hình quạt có khoảng cách lớn hơn 6) và "hẹp quá" (cung hình quạt bằng $360^0 : 9 = 40^0$, không cần thiết phải hẹp đến thế).

Ta cần cải tiến cách giải này bằng cách làm cho các hình quạt "ngắn lại và rộng ra".

Lời giải

Chia hình tròn $(O;7)$ thành hình tròn đồng tâm O bán kính 3 và hình vành khăn.

Lại chia hình vành khăn thành tám phần bằng nhau bởi các bán kính kẻ từ O và tạo thành góc 45^0.

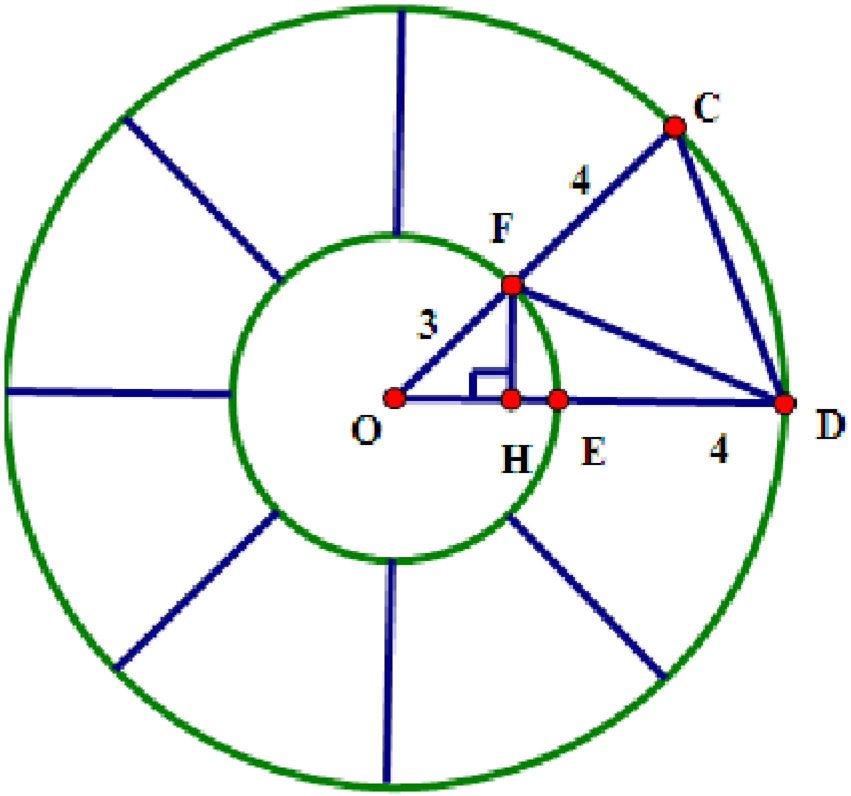
Khi đó (O) được chia thành chín phần. Do đó theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại hai điểm thuộc cùng một phần chẳng hạn A và B.

+ Nếu A, B nằm trong đường tròn tâm O bán kính 3 thì $AB < 6$.

+ Nếu A, B thuộc cùng một mảnh của hình vành khăn (có thể ở trên biên bên của hình vành khăn). Ta sẽ chứng minh $AB < 6$ bằng cách chứng minh khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc mảnh hình vành khăn nhỏ hơn 6.

Có $EF < CD, ED = FC, EC = FD$ nên khoảng cách lớn nhất là $Max\{FD, CD\}$

(hình 56).



hình 56

✓ $FC = 7 - 3 = 4 < 6$.

✓ $FD^2 = FO^2 + DO^2 - 2FO.DO.\cos 45^0 = 58 - 21\sqrt{2} < 36$.

Nên $FD < 6$.

✓ $CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO.DO.\cos 45^0 = 98 - 49\sqrt{2} < 36$.

Do đó $CD < 6$.

Vậy ta có khoảng cách lớn nhất giữa các điểm đó nhỏ hơn 6.

Bài 2.10. Bên trong hình tròn (C) có diện tích bằng 8, đặt 17 điểm phân biệt, bất kì. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Lời giải

Chia (C) thành tám hình quạt bằng nhau có diện tích 1.

Khi đó tồn tại một hình quạt chứa ba điểm.

Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm nhỏ hơn diện tích hình quạt chính là 1. Vậy ta có điều phải chứng minh.

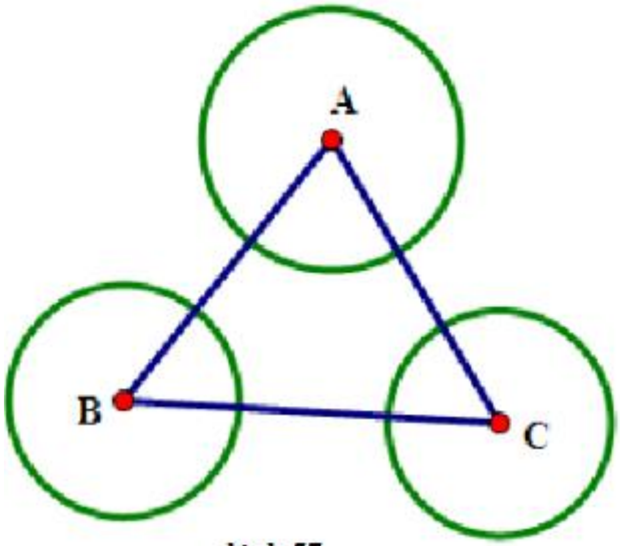
Bài 2.11. Bên trong tam giác đều ABC có cạnh $11cm$, lấy hai điểm tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại một điểm nằm trên cạnh của tam giác đó sao cho các khoảng cách từ điểm đó đến mỗi điểm trong hai điểm đã cho đều lớn hơn $5cm$.

Lời giải

Vẽ ba đường tròn bán kính $5cm$ có tâm là A,B,C (hình 57).

Vì $AB = BC = CA = 11cm$ nên ba đường tròn trên đôi một nằm ngoài nhau.

Trong ba đường tròn đó, tồn tại một đường tròn không chứa điểm nào trong số hai điểm đã cho. Tâm của đường tròn này là điểm phải tìm, nó nằm trên cạnh của tam giác và cách mỗi điểm trong hai điểm đã cho khoảng cách lớn hơn $5cm$.



hình 57

2.2. Hình nằm trong một hình

Ở đây đưa ra các bài toán đặt một hình nhỏ trong một hình lớn hơn. Các phương pháp sử dụng chủ yếu là nguyên lí Đirichlê, phương pháp mở rộng và thu nhỏ một hình.

Bài 2.12. Bên trong một hình vuông cạnh 99, đặt 80 đồng xu hình tròn bán kính 1. Chứng minh rằng có thể đặt được một tấm bìa hình vuông cạnh 10 nằm trong hình vuông ban đầu mà không chờm lên một đồng xu nào.

Nhận xét. Bài toán này dễ dàng giải quyết khi sử dụng cách chia hình vuông thành nhiều hình vuông nhỏ, sau đó sử dụng nguyên lí Đirichlê.

Lời giải

Chia hình vuông cạnh 99 thành 81 ô vuông, mỗi ô vuông có cạnh $\frac{99}{9}=11$.

Xét 80 điểm là tâm của 80 đồng xu. Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại một ô vuông không chứa một điểm nào trong 80 điểm đó. Đây là ô vuông đặt được tấm bìa hình vuông cạnh 10 thỏa mãn bài toán. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.13. Bên trong một hình vuông cạnh 90, đặt 50 đồng xu hình tròn bán kính 1. Chứng minh rằng có thể đặt được một tấm bìa hình tròn bán kính 5 nằm trong hình vuông ban đầu mà không chờm lên một đồng xu nào.

Nhận xét

Có thể sử dụng cách trên cho bài này. Ngoài ra ta có cách sau

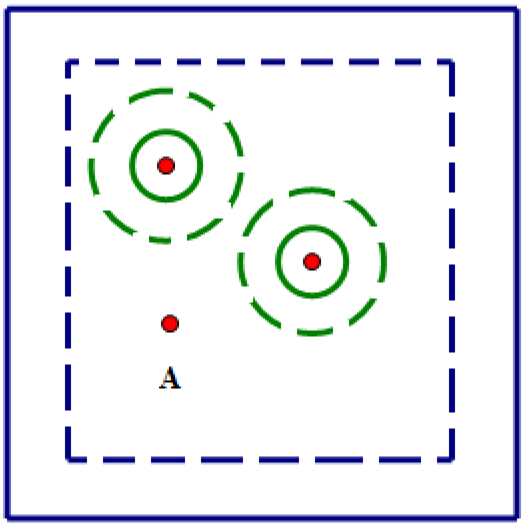
Lời giải

Vẽ 50 hình tròn có tâm là tâm của 50 đồng xu đã cho, bán kính $1+5=6$.

Khi đó tổng diện tích của 50 hình tròn đó là $S_1=50\pi.6^2\approx 5655$.

Thu nhỏ hình vuông cạnh 90 mỗi phía 5, ta được hình vuông đồng tâm có cạnh $90-2\times 5=80$ (hình 61).

Do đó diện tích hình vuông thu nhỏ là $S=80^2=6400>S_1$.



hình 61

Vậy tồn tại điểm A nằm trong hình vuông cạnh 80, nằm ngoài các hình tròn bán kính 6.

Vẽ hình tròn tâm A, bán kính 6. Hình tròn này nằm trong hình vuông cạnh 90 mà không chờm lên một đồng xu nào. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.14. Bên trong một hình vuông cạnh 42, đặt 10 đồng xu hình tròn bán kính 2. Chứng minh rằng có thể đặt được một tấm bìa hình tròn bán kính 4 nằm trong hình vuông ban đầu mà không chờm lên một đồng xu nào.

Hướng giải

Như **Bài 2.37**, vẽ 10 hình tròn có tâm là tâm 10 đồng xu đã cho, bán kính $2+4=6$.

Thu nhỏ hình vuông cạnh 42 về mỗi phía 4 ta được hình vuông cạnh 34.

Khi đó tồn tại điểm A nằm trong hình vuông cạnh 34 và nằm ngoài các hình tròn bán kính 6. Hình tròn tâm A, bán kính 4 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2.15. Bên trong một đường tròn có bán kính 5, đặt một tam giác có diện tích lớn hơn 25. Chứng minh rằng tam giác đó chứa tâm của đường tròn.

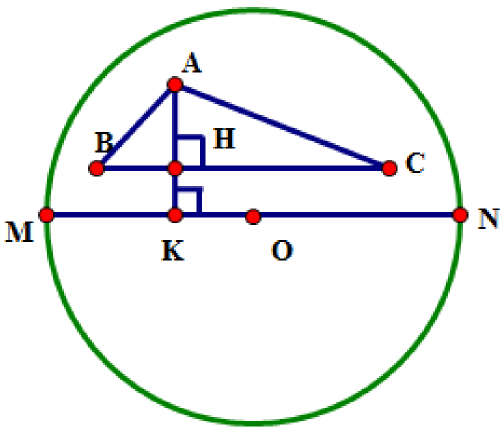
Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử có ΔABC diện tích lớn hơn 25 đặt trong hình tròn tâm O bán kính 5 mà không chứa tâm O.

Khi đó tồn tại một cạnh của tam giác mà đỉnh đối diện và O nằm khác phía. Chẳng hạn cạnh BC.

Kẻ đường kính MN song song BC. Kẻ $AK \perp MN$, cắt BC tại H. Khi đó $AH \perp BC$ (hình 62).



hình 62

Có $BC < MN = 10; AH < AK \le 5$.

Nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH < \dfrac{1}{2}.10.5 = 25$.

Do đó $S_{\Delta ABC} < 25$. Điều này trái với giả thiết.

Vậy ΔABC chứa tâm O. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.16. Bên trong một hình chữ nhật kích thước 32×105, đặt 25 đồng xu hình tròn bán kính 2. Chứng minh rằng có thể đặt được một tấm bìa hình tròn bán kính 4 nằm trong hình chữ nhật ban đầu mà không chờm lên một đồng xu nào.

Lời giải. Vẽ 25 hình tròn có tâm là tâm 25 đồng xu đã cho, bán kính $2+4=6$.

Khi đó diện tích 25 hình tròn đó là $S_1 = 25\pi.6^2 = 900\pi < 2828$.

Thu nhỏ hình chữ nhật kích thước 32×105 về mỗi phía 4 ta được hình chữ nhật có diện tích $S = (32-4).(105-4) = 28\times 101 = 2828 > S_1$.

Do đó tồn tại điểm A nằm trong hình chữ nhật kích thước 28×101 và nằm ngoài các hình tròn bán kính 6. Hình tròn tâm A, bán kính 4 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2.3. Phủ hình

Trên thực tế ta gặp bài toán này rất nhiều. Ví dụ như người ta lát sàn nhà, tường nhà, vỉa hè, quảng trường, con đường gốm sứ,…bằng những viên gạch hình dáng khác nhau như hình chữ nhật, hình vuông, hình lục giác,…. Các bài toán về phủ hình rất đa dạng và đòi hỏi tư duy sâu sắc. Ở đây ta xét các bài toán phủ hình đơn giản nhất khi mới tiếp cận với chuyên mục này.

Bài 2.17. Trên mặt phẳng cho n điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong chúng không vượt quá 1. Chứng minh rằng có thể phủ chúng bởi một hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Vẽ các đường tròn F_i có tâm là các điểm đã cho, bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nếu ta chứng minh được ba đường tròn bất kì giao nhau thì tất cả các đường tròn đó giao nhau. Khi đó một điểm thuộc miền giao là tâm đường tròn phủ tất cả n điểm đã cho.

Thật vậy, xét ba điểm bất kì M_1, M_2, M_3.

TH1. M_1, M_2, M_3 là ba đỉnh của một tam giác tù (hoặc vuông).

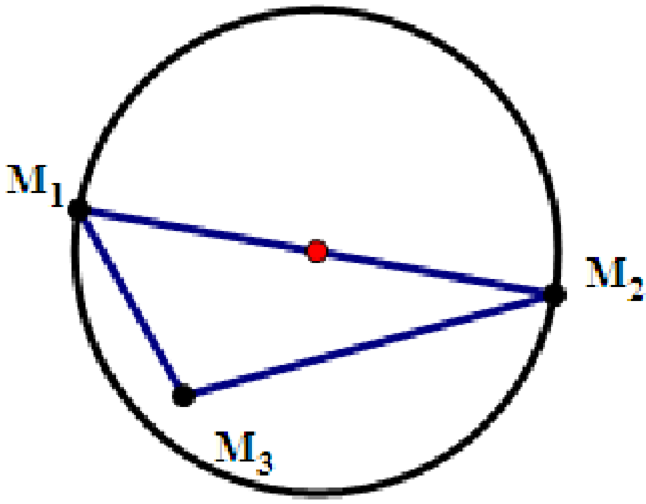
Giả sử M_1M_2 là cạnh lớn nhất của tam giác $M_1M_2M_3$ (hình 70).

Khi đó $\widehat{M_1M_3M_2}$ là góc tù (hoặc vuông).

Như vậy M_3 nằm trong (hoặc trên) đường tròn đường kính M_1M_2.

Mà M_3 bất kì nên đường tròn đường kính M_1M_2 phủ kín tất cả các điểm đã cho.

Vậy F_1, F_2, F_3 phủ trung điểm của M_1M_2.



Hình 70

TH2. M_1, M_2, M_3 là ba đỉnh của một tam giác nhọn.

Giả sử đường tròn $(O;R)$ ngoại tiếp tam giác $M_1M_2M_3$ và $\widehat{M_1M_2M_3}$ là góc lớn nhất của tam giác $M_1M_2M_3$.

Khi đó $90^0 > \widehat{M_1M_2M_3} \geq 60^0$.

Cho nên $\sin\widehat{M_1M_2M_3} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Với $R = \dfrac{M_1M_3}{2\sin\widehat{M_1M_2M_3}} < \dfrac{1}{2\sin\widehat{M_1M_2M_3}}$.

Do đó $R < \dfrac{1}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy hệ F_i có giao khác rỗng. Gọi I là điểm trong giao khác rỗng này.

Ta có đường tròn $\left(I;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ phủ tất cả các điểm đã cho.

Bài 2.18. Một bàn hình vuông cạnh 150 được chia thành n^2 hình vuông nhỏ bằng nhau bởi các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông lớn. Trong mỗi hình vuông nhỏ vẽ một đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng diện tích phần mặt bàn bị phủ bởi các hình tròn không phụ thuộc vào n.

Lời giải. Chia mỗi cạnh hình vuông thành n đoạn bằng nhau, mỗi đoạn dài $\frac{150}{n}$ ta được n^2 hình vuông.

Hình tròn nội tiếp mỗi hình vuông nhỏ có bán kính là $\frac{150}{2n}=\frac{75}{n}$.

Do đó diện tích một hình tròn nội tiếp là $\pi\left(\frac{75}{n}\right)^2$.

Nên diện tích n^2 hình tròn nội tiếp là $75^2.\pi$, không phụ thuộc vào n.

Bài 2.19. Cho một đa giác lồi. Xếp được nhiều nhất 10 đồng xu hình tròn đường kính 4, đôi một không giao nhau và có tâm nằm trong đa giác. Chứng minh rằng 10 hình tròn bán kính 4, đồng tâm với 10 đồng xu sẽ phủ kín đa giác.

Lời giải

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử 10 hình tròn lớn bán kính 4 không phủ kín đa giác.

Khi đó tồn tại điểm A nằm trong đa giác và nằm ngoài các hình tròn lớn. Vậy có thể đặt được thêm một đồng xu tâm A, đường kính 4 mà không chờm lên các đồng xu trước. Do đó số đồng xu đường kính 4, không giao nhau và có tâm nằm trong đa giác nhiều hơn 10. Điều này trái với giả thiết.

Vậy 10 hình tròn bán kính 4, đồng tâm với 10 đồng xu sẽ phủ kín đa giác.

Bài 2.20. Cho 2015 điểm trên mặt phẳng, hai điểm nào cũng có khoảng cách không quá 20 và ba điểm nào cũng là ba đỉnh của một tam giác tù. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính 10 phủ 2015 điểm đã cho.

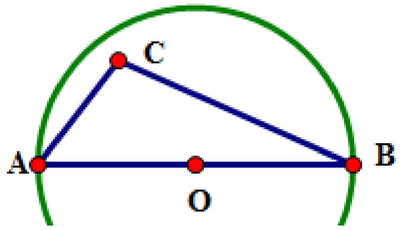
Lời giải

Gọi A, B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong 2015 điểm đã cho, ta có $AB \le 20$.

Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AB. Gọi C là điểm bất kì trong 2013 điểm còn lại. Vì ΔABC tù nên $\widehat{C} > 90^0$ (vì AB là cạnh lớn nhất).

Cho nên C nằm trong (O).

Vậy cả 2013 điểm còn lại đều nằm trong (O). Do đó (O) phủ 2015 điểm đã cho.



Hình 77

2.4. Hình giao nhau

Để chứng minh hai hình giao nhau, ngoài các cách chứng minh thông thường ta còn dùng các cách sau

- Hai đường thẳng cắt nhau nếu chúng là hai đường chéo của một tứ giác lồi.
- Để xét số giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (O), ta chiếu đường tròn (O) lên đường thẳng Δ vuông góc với d, được một đoạn thẳng AB.

+ d cắt đoạn thẳng AB phía giữa đoạn thẳng thì d cắt (O).

+ d cắt đoạn thẳng AB tại một trong hai đầu mút thì d tiếp xúc với (O).

+ d không cắt đoạn thẳng AB thì d không có giao điểm với (O).

Bài 2.21. Trong một hình vuông cạnh 1, đặt 20 đường tròn, mỗi đường tròn có bán kính $\frac{1}{12}$. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với ít nhất bốn đường tròn.

Nhận xét. Bài này có hai cách giải

Cách 1. Chiếu 20 đường tròn trên một cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng tồn tại một điểm của cạnh đó thuộc ít nhất bốn hình chiếu.

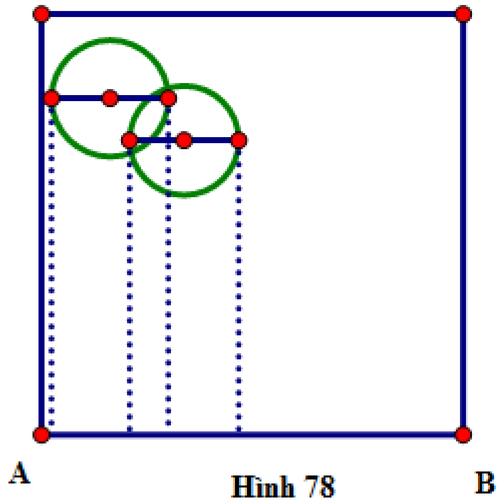
Cách 2. Chia hình vuông thành các dải có chiều rộng nhỏ hơn đường kính của đường tròn thì đường tròn nào cũng bị cắt bởi biên của một dải. Dùng nguyên lí Đirichlê để chứng tỏ một biên cắt bốn đường tròn.

Lời giải

Cách 1. Kẻ các đường kính của các đường tròn song song với cạnh AB của hình vuông. Chiếu các đường kính đó trên cạnh AB (hình 78).

Tổng độ dài của các đường kính là $20.2.\frac{1}{12}=\frac{20}{6}=3\frac{1}{3}$.

Nên tổng độ dài của các hình chiếu cũng là $3\frac{1}{3}$. Mà $AB=1$ nên tồn tại một điểm, chẳng hạn điểm M thuộc đoạn thẳng AB và thuộc ít nhất bốn hình chiếu.

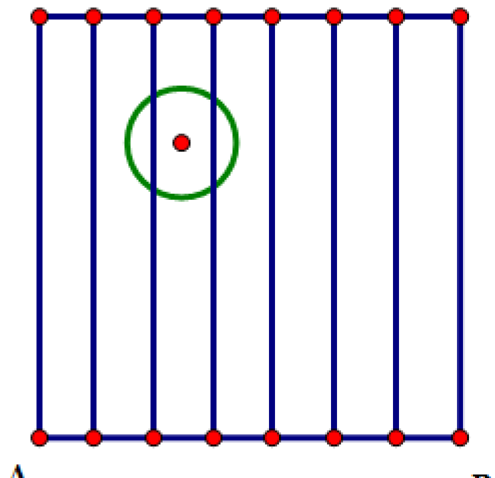


Hình 78

Cách 2. Đường kính của mỗi đường tròn là $\frac{1}{6}$.

Kẻ sáu đường thẳng song song với một cạnh của hình vuông và cách nhau $\frac{1}{7}$, chúng chia hình vuông thành bảy dải hình chữ nhật, mỗi dải có chiều rộng $\frac{1}{7}$, hình 79.

Do $\frac{1}{7}<\frac{1}{6}$ nên mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một trong sáu đường thẳng nói trên. Có 6 đường thẳng, có 20 đường tròn, mà 20 chia 6 được 3 và dư $\frac{1}{3}$ nên theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất bốn đường tròn.



Hình 79

Nhận xét. Với ví dụ này thì cách 2 có hiệu quả hơn cách 1. Cách 2 cho chúng ta thấy đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt, còn cách 1 chỉ chứng minh được sự giao nhau.

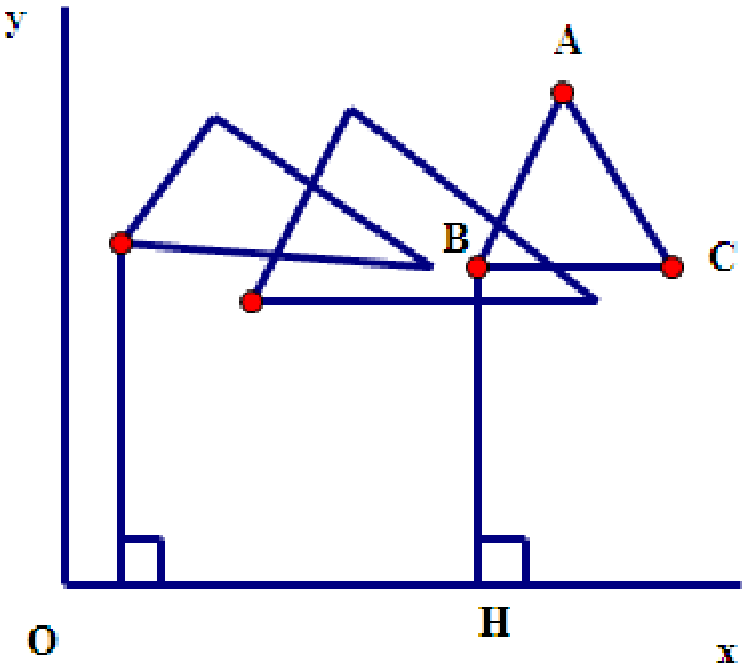
Bài 2.22. Trên mặt phẳng cho 16 tam giác, trong đó bất kì tam giác nào cũng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng giao với tất cả các tam giác.

Lời giải

Vẽ góc vuông xOy sao cho tất cả các tam giác đều thuộc miền trong của góc .

Với mỗi tam giác, chọn một đỉnh gần Oy nhất, từ đó kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, hình 80.

Trong chín đường vuông góc này, chọn đường cách xa Oy nhất. Giả sử đó là đường thẳng BH đi qua đỉnh B của tam giác ABC. Ta chứng minh BH là đường thẳng cần tìm.



Hình 80

Đường thẳng BH chia miền trong của góc xOy thành hai miền I và II với bờ là BH (miền II chứa điểm C).

Không có tam giác nào nằm hoàn toàn trong miền I vì nếu có thì tam giác đó không có giao với ΔABC.

Không có tam giác nào nằm hoàn toàn trong miền II vì theo cách chọn BH.

Vậy BH là đường thẳng giao với mọi tam giác đã cho.

Bài 2.23. Cho hình tròn có bán kính n, n là số nguyên dương. Trong hình tròn có $4n$ đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Cho trước một đường thẳng d. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d' hoặc song song với d, hoặc là vuông góc với d sao cho d' cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

Lời giải. Giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài bằng 1, d và d' là hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau. Gọi $A'B'$ và $A''B''$ là các hình chiếu của AB lên d và d'. Khi đó ta có

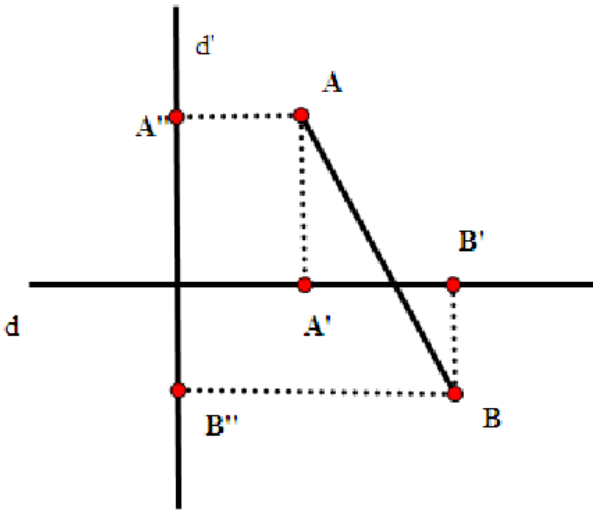
$$A'B' + A''B'' = A'B' + AA' + BB' \geq AB.$$

Hay $A'B' + A''B'' \geq 1.$ (9)

Chiếu vuông góc tất cả $4n$ đoạn thẳng lên d và d'.

Từ (9), ta có tổng độ dài hình chiếu của tất cả $4n$ đoạn thẳng không bé hơn $4n$. Vì vậy, theo nguyên lí Đirichlê trong hai đường thẳng d và d' có ít nhất một đường thẳng mà tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng lên nó không bé hơn $2n$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là d.



Hình 81

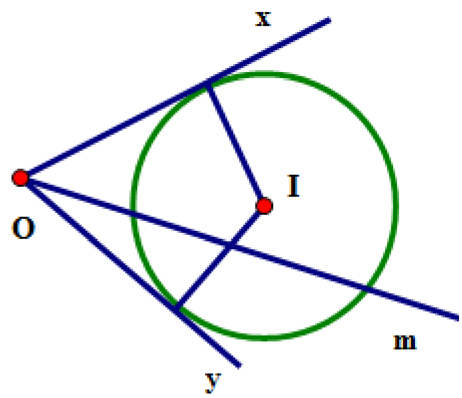
Mặt khác, mỗi đoạn thẳng đều nằm trọn trong hình tròn bán kính n (đường kính $2n$), nên hợp các hình chiếu của chúng trên d có độ dài không vượt quá $2n$.

Vì vậy, theo nguyên lí Đirichlê trên d tồn tại ít nhất một điểm M thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng trong số $4n$ đoạn thẳng đã cho. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d tại M. Đường thẳng Δ chính là đường thẳng cần tìm.

Chú ý. Nếu ở trên thay d bởi d' thì đường thẳng phải tìm sẽ có dạng song song với d (vì nó vuông góc với d').

-
- Cho điểm O nằm ngoài đường tròn (I). Tia Om giao với đường tròn (I) nếu nó nằm trong góc xOy hoặc trùng với một cạnh của góc đó

(Ox, Oy là các tiếp tuyến của đường tròn (I)), hình 82.



Hình 82

Bài 2.24. Cho điểm O trên mặt phẳng.

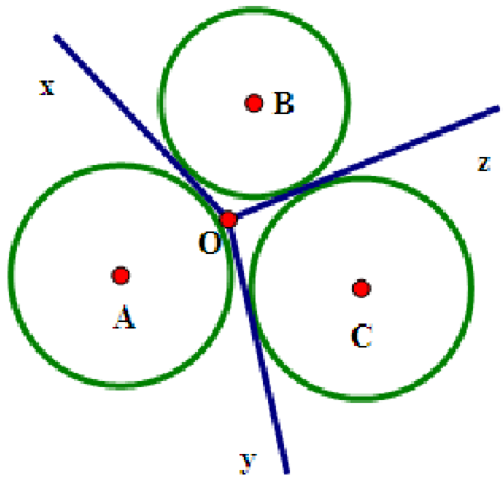
a) Có thể vẽ được hay không trên mặt phẳng ba đường tròn sao cho điểm O nằm ngoài các đường tròn và mọi tia gốc O đều giao với ít nhất một đường tròn.

b) Có thể vẽ được hay không trên mặt phẳng năm đường tròn sao cho điểm O nằm ngoài các đường tròn và mọi tia gốc O đều giao với ít nhất hai đường tròn.

Lời giải

a) Có thể vẽ được, hình 83.

Vẽ ba tia gốc O bất kì chia mặt phẳng thành ba góc khác góc bẹt. Vẽ ba đường tròn tiếp xúc với các cạnh của ba góc đó. Mọi tia gốc O đều nằm trong một trong ba góc hoặc trùng với một trong ba tia, do đó nó giao với ít nhất một đường tròn.



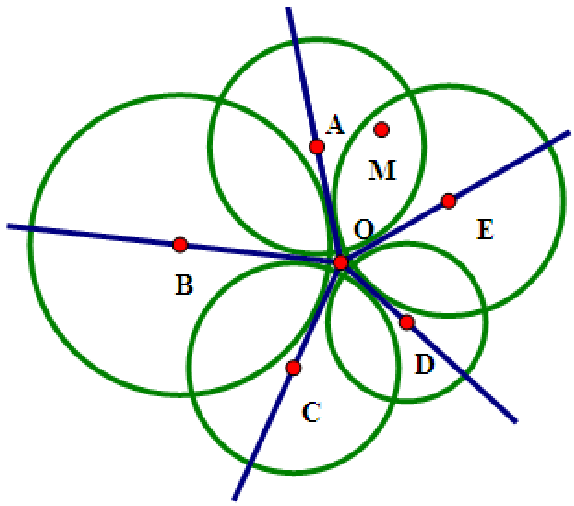
Hình 83

b) Có thể vẽ được.

Vẽ năm tia gốc O chia mặt phẳng thành năm góc có số đo 72^0.

Vẽ năm đường tròn tiếp xúc với các cạnh của các góc 144^0, hình 84.

Như vậy mọi tia gốc O đều giao với ít nhất hai đường tròn.



Hình 84

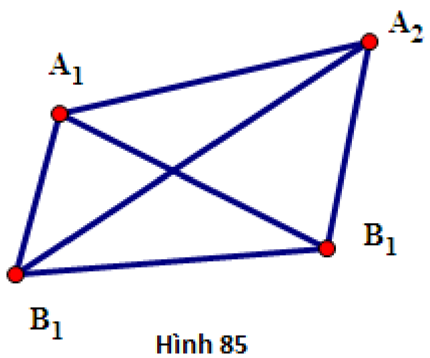
Thật vậy, gọi M là điểm bất kì của mặt phẳng thì M nằm trong (hoặc trên cạnh) của một trong năm góc 72^0. Khi đó M nằm trong (hoặc trên cạnh) của hai góc 144^0. Ví dụ như M nằm trong góc AOE, khi đó M nằm trong hai góc BOE và AOD. Như vậy tia OM giao với hai đường tròn tâm A và tâm E.

Bài 2.25. Cho chín điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể chọn được tám điểm $A_i, B_i, (i=\overline{1,4})$ trong số các điểm đó sao cho sau khi nối các cặp điểm A_i với B_i, $(i=\overline{1,4})$ bởi các đoạn thẳng, ta được ít nhất là hai giao điểm.

Nhận xét

Bài này sử dụng tính chất của tứ giác lồi.

Biết rằng hai đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2 cắt nhau nếu $A_1A_2B_1B_2$ là tứ giác lồi, hình 85.



Hình 85

Ta sẽ chứng minh tồn tại tám điểm là đỉnh của hai tứ giác lồi.

Bài toán phụ. Cho năm điểm không thẳng hàng. Luôn tồn tại bốn điểm là bốn đỉnh của một tứ giác lồi.

Chứng minh. Xem trong **Bài 1.47**.

Lời giải

Chia chín điểm đã cho thành hai nhóm

Nhóm I gồm năm điểm đã cho, nhóm II gồm bốn điểm còn lại.

Xét năm điểm trong nhóm thứ nhất, tồn tại bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi. Gọi đó là tứ giác $A_1A_2B_1B_2$. Như vậy A_1B_1 cắt A_2B_2.

Xét điểm còn lại trong nhóm I và bốn điểm trong nhóm II. Trong năm điểm đó cũng tồn tại bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi, ta gọi là tứ giác $A_3A_4B_3B_4$. Suy ra A_3B_3 cắt A_4B_4. Vậy ta có ít nhất hai giao điểm.

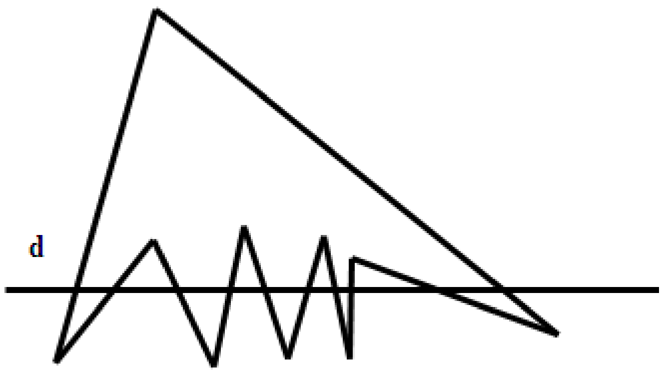
Bài 2.26. Có hay không một đa giác đơn n cạnh và một đường thẳng không đi qua đỉnh của đa giác và cắt bên trong mọi cạnh của đa giác nếu

a) $n = 10$.

b) $n = 11$.

Lời giải

a) Có tồn tại, như hình 86.



Hình 86

b) Không tồn tại. Thật vậy

Mỗi lần đường thẳng d gặp một cạnh của đa giác là một lần d từ ngoài vào trong đa giác hoặc từ trong đa giác ra ngoài đa giác.

d không đi qua đỉnh của đa giác, lúc đầu ở ngoài đa giác, lúc cuối cùng cũng ở ngoài đa giác nên số lần d gặp cạnh của đa giác là một số chẵn.

Tổng quát

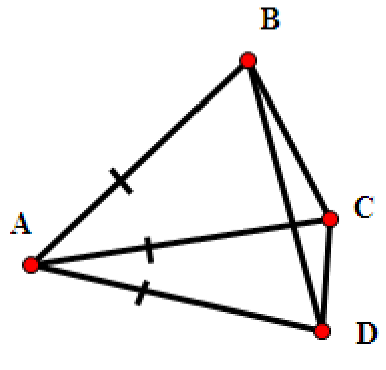
- Tồn tại một đa giác đơn $2k$ cạnh và một đường thẳng không đi qua đỉnh của đa giác và cắt bên trong mọi cạnh của đa giác.
- Không tồn tại một đa giác đơn $2k+1$ cạnh và một đường thẳng không đi qua đỉnh của đa giác và cắt bên trong mọi cạnh của đa giác.

2.5. Đếm các yếu tố hình học

Bài 2.27. Một n - giác lồi $n > 3$ có nhiều nhất bao nhiêu cạnh bằng đường chéo lớn nhất?

Lời giải

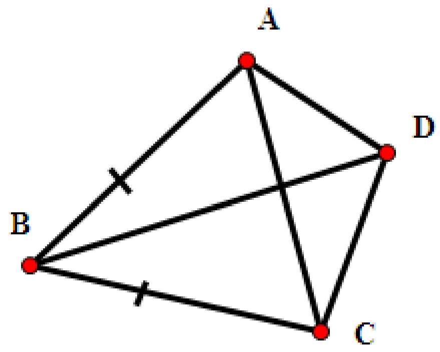
Trên đường tròn $(A;R)$ lấy các điểm B,C,D sao cho BC, CD và BD nhỏ hơn AC. Tứ giác $ABCD$ có hai cạnh bằng đường chéo lớn nhất là AC, hình 92.



Hình 92

Ta sẽ chứng minh với mọi đa giác lồi, số cạnh bằng đường chéo lớn nhất không quá 2.

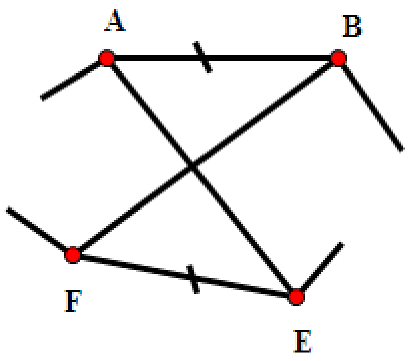
Các cạnh bằng đường chéo không thể là ba cạnh của một tam giác vì như hình 93, BD là đường chéo lớn nhất chứ không phải AC.



Hình 93

Giả sử tồn tại một đa giác lồi có đường chéo lớn nhất bằng a và số cạnh bằng a có nhiều hơn 2.

Ta chọn ra hai cạnh không có đỉnh chung, chẳng hạn AB và EF, hình 94.



Hình 94

Ta sẽ chứng minh tồn tại một đường chéo có độ dài lớn hơn a. Thật vậy.

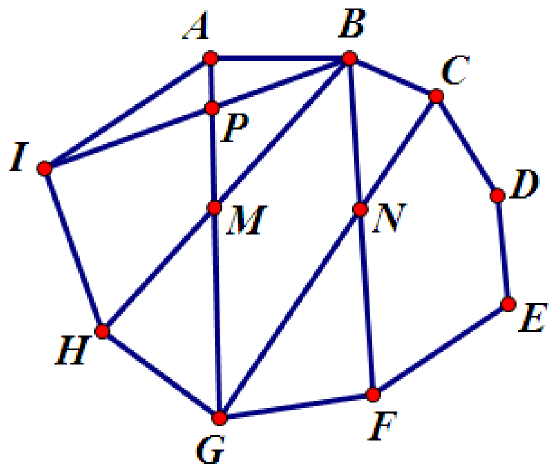
Ta có $AE+BF>AB+\text{EF}=a+a=2a$ nên tồn tại một trong hai đường chéo AE hoặc BF lớn hơn a. Điều này trái với giả thiết đường chéo lớn nhất bằng a.

Bài 2.28. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác lồi chín cạnh. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Có bao nhiêu giao điểm của các cặp đường chéo nằm trong đa giác đó?

Lời giải

Mỗi giao đểm của hai đường chéo tương ứng với duy nhất một tứ giác lồi có các đỉnh là đỉnh đa giác. Như vậy có bao nhiêu tứ giác thì có bấy nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác.

Ví dụ như hình 95, M ứng với tứ giác $ABGH$, N ứng với tứ giác $BCFG$, P ứng với tứ giác $ABGI$. Vậy số giao điểm là $C_9^4 = 126$.



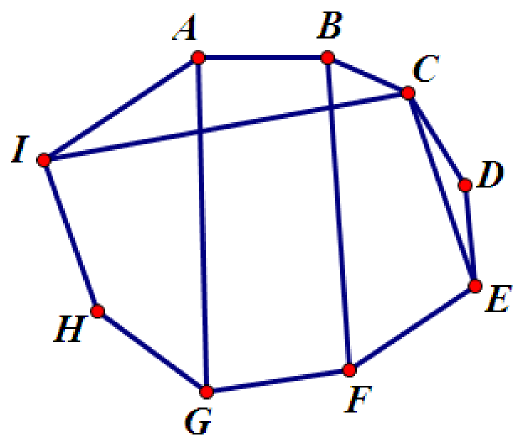
Hình 95

Bài 2.30. Cho một đa giác lồi có chín cạnh. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Hỏi các đường chéo chia đa giác thành bao nhiêu phần?

Lời giải

Đường chéo thứ nhất chia đa giác thành $1+1=2$ phần.

Đường chéo thứ hai nếu không cắt đường chéo thứ nhất bên trong đa giác thì tạo thêm 1 phần. Nếu cắt đường chéo thứ nhất bên trong đa giác thì tạo thêm 2 phần, hình 96.



Hình 96

Cứ như thế, đường chéo sau nếu không cắt đường chéo trước thì tạo thêm 1 phần, nếu cắt các đường chéo trước tại m điểm thì tạo thêm $m+1$ phần.

Nên số phần phải đếm là $1+D+M$, trong đó D là số đường chéo của đa giác, M là số giao điểm của các đường chéo ở bên trong đa giác.

Theo **Bài 2.29.** ở trên ta có $1+\frac{9(9-3)}{2}+126=154$ (phần).

Bài 2.31. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?

Chú ý. Tổng các góc ngoài của một đa giác bằng 360^0.

Lời giải

Thấy ΔABC có ba góc nhọn sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử một tứ giác có bốn góc nhọn thì bốn góc ngoài của tứ giác đó đều là góc tù.

Như vậy tổng các góc ngoài của tứ giác lớn hơn 360^0. Điều này không đúng.

Vậy một đa giác lồi có nhiều nhất là ba góc nhọn.

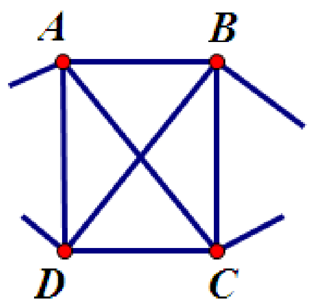
Bài 2.32. Một đa giác lồi có mọi đường chéo bằng nhau. Đa giác đó có thể có mấy cạnh?

Lời giải

Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau thỏa mãn bài toán.

Ngũ giác đều có các đường chéo bằng nhau cũng thỏa mãn bài toán.

Ta chứng minh những đa giác có nhiều hơn năm cạnh thì mọi đường chéo không bằng nhau.



Hình 97

Giả sử một đa giác có nhiều hơn năm cạnh, AB và CD là hai cạnh không kề nhau. Khi đó $AC+BD>AD+BC$, hình 97.

Nên bốn đường chéo AC, BD, AD, BC không thể bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.33. Trên mặt phẳng, đánh dấu $n+4$ điểm, trong đó không có bốn điểm nào là đỉnh của một hình vuông, còn n điểm nằm trong hình vuông. Nối các điểm đó với nhau sao cho không có đoạn nối nào chứa điểm đánh dấu trừ đầu mút, không có hai đoạn đánh dấu nào có điểm chung trừ đầu mút.

a) Tính số tam giác tạo thành.

b) Tính số đoạn thẳng được nối.

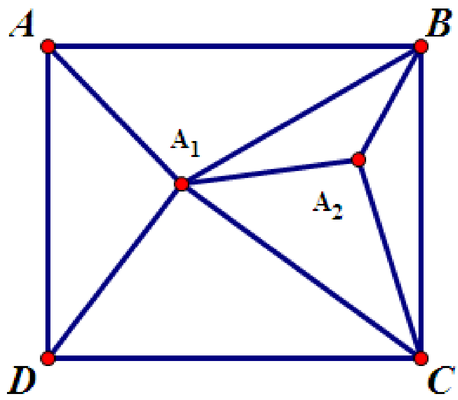
Lời giải

a) **Cách 1.**

Giả sử có n điểm $A_1,...,A_n$ nằm trong hình vuông $ABCD$.

Nối A_1 với các đỉnh của hình vuông ta được bốn tam giác.

A_2 nằm trong một trong bốn tam giác trên.



Hình 98

Nối A_2 với ba đỉnh của tam giác chứa nó ta được thêm 2 tam giác, hình 98.

Cứ như vậy từ điểm A_2 đến điểm A_n, mỗi lần có thêm 2 tam giác.

Do đó số tam giác là $4+2.(n-1)=2n+2$ (tam giác)

Cách 2. Số đo của các góc có đỉnh là n điểm nằm trong hình vuông là $4nv$.

Số đo của bốn góc hình vuông là $4v$.

Như vậy tổng các góc tại các đỉnh trong hình vuông và đỉnh hình vuông là $4nv+4v$.

Mà mỗi tam giác có tổng số đo các góc là $2v$.

Do đó số tam giác là $\frac{4nv+4v}{2v}=2n+2$ (tam giác).

b) $2n+2$ tam giác có số cạnh là $3(2n+2)$.

Cộng thêm bốn cạnh của hình vuông ta được $6n+10$ cạnh.

Mà mỗi cạnh được tính hai lần nên số cạnh là $\frac{6n+10}{2}=3n+5$.

Vậy có $3n+5$ đoạn thẳng được nối.

Bài 2.34. Cho một đa giác lồi có 18 cạnh. Chứng minh rằng tồn tại một đường chéo của đa giác không song song với một cạnh nào của đa giác.

Lời giải

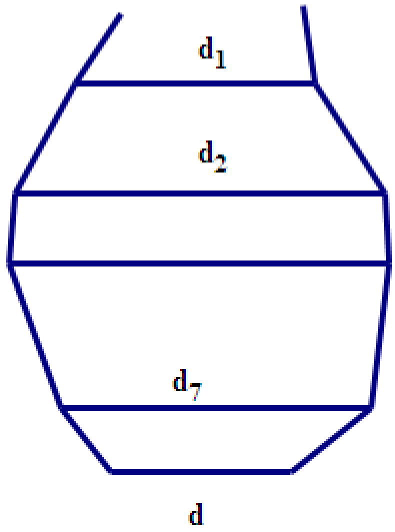
Giả sử tất cả các đường chéo của đa giác đều song song với một cạnh nào đó của đa giác.

Số đường chéo của đa giác là $\frac{18(18-3)}{2}=135$.

Có 135 đường chéo, có 18 cạnh.

Phép chia 135 cho 18 được 7 và dư.

Do đó tồn tại 8 đường chéo cùng song song với một cạnh d của đa giác.



Hình 99

Gọi d_1 là đường chéo xa d nhất, hình 99.

Với cạnh d và 8 đường chéo, ta đã có 18 đỉnh của đa giác. Như vậy d_1 là cạnh của đa giác chứ không phải đường chéo. Điều này mâu thuẫn với việc gọi d_1.

Vậy tồn tại một đường chéo của đa giác không song song với một cạnh nào của đa giác.

- Bài toán sau đây sẽ chỉ ra giới hạn gần hơn của số đường chéo không song song với cạnh nào của đa giác.

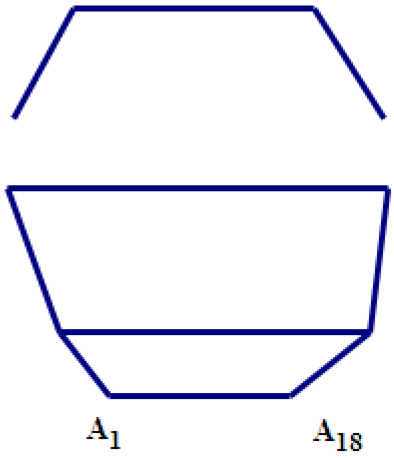
Bài 2.35. Cho một đa giác lồi có 18 cạnh. Chứng minh rằng số đường chéo của đa giác không song song với một cạnh nào của đa giác lớn hơn hoặc bằng 9.

Lời giải

Xét cạnh A_1A_{18} của đa giác, hình 100.

Theo bài tập trên, có nhiều nhất bảy đường chéo song song với A_1A_{18}.

Nên với 18 cạnh, số đường chéo song song với các cạnh của đa giác nhiều nhất là $18.7 = 126$. Mà đa giác này có 135 đường chéo.



Hình 100

Do đó, số đường chéo không song song với cạnh của đa giác lớn hơn hoặc bằng $135 - 126 = 9$.

Bài 2.36. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác lồi 15 cạnh. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Có bao nhiêu giao điểm của các cặp đường chéo nằm trong đa giác đó?

Lời giải. Mỗi giao đểm của hai đường chéo tương ứng với duy nhất một tứ giác lồi có các đỉnh là đỉnh đa giác.

Như vậy có bao nhiêu tứ giác thì có bấy nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác.

Vậy số giao điểm là $C_{15}^4 = 1365$.

Bài 2.37. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác lồi 20 cạnh. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Có bao nhiêu giao điểm của các cặp đường chéo nằm trong đa giác đó?

Hướng dẫn giải. Mỗi giao đểm của hai đường chéo tương ứng với duy nhất một tứ giác lồi có các đỉnh là đỉnh đa giác.

Như vậy có bao nhiêu tứ giác thì có bấy nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác.

Vậy số giao điểm là $C_{20}^{4}=4845$.

Bài 2.38. Cho một đa giác lồi có 15 cạnh. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Hỏi các đường chéo chia đa giác thành bao nhiêu phần?

Lời giải. Đường chéo thứ nhất chia đa giác thành $1+1=2$ phần.

Đường chéo thứ hai nếu không cắt đường chéo thứ nhất bên trong đa giác thì tạo thêm 1 phần. Nếu cắt đường chéo thứ nhất bên trong đa giác thì tạo thêm 2 phần.

Cứ như thế, đường chéo sau nếu không cắt đường chéo trước thì tạo thêm 1 phần, nếu cắt các đường chéo trước tại m điểm thì tạo thêm $m+1$ phần.

Do đó số phần phải đếm là $1+D+M$, trong đó D là số đường chéo của đa giác, M là số giao điểm của các đường chéo ở bên trong đa giác.

Theo **Bài 2.36** ở trên ta có $1+\dfrac{15(15-3)}{2}+1365=1456$ (phần).

Bài 2.39. Trên mặt phẳng, đánh dấu 2015 điểm, trong đó không có bốn điểm nào là đỉnh của một hình vuông, còn 2011 điểm nằm trong hình vuông. Nối các điểm đó với nhau sao cho không có đoạn nối nào chứa điểm đánh dấu trừ đầu mút, không có hai đoạn đánh dấu nào có điểm chung trừ đầu mút.

a) Tính số tam giác tạo thành.

b) Tính số đoạn thẳng được nối.

Hướng dẫn giải. Tương tự như **Bài 2.33.**

a) Có 4024 tam giác.

b) $\dfrac{4024.3+4}{2}=6038$ đoạn thẳng được nối.

Bài 2.40. Trên mặt phẳng cho bảy điểm. Vẽ tất cả các đoạn thẳng nối hai trong bảy điểm ấy rồi vẽ các trung điểm của chúng. Có ít nhất bao nhiêu trung điểm?

Lời giải. Gọi A và B là hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong bảy điểm đó. I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

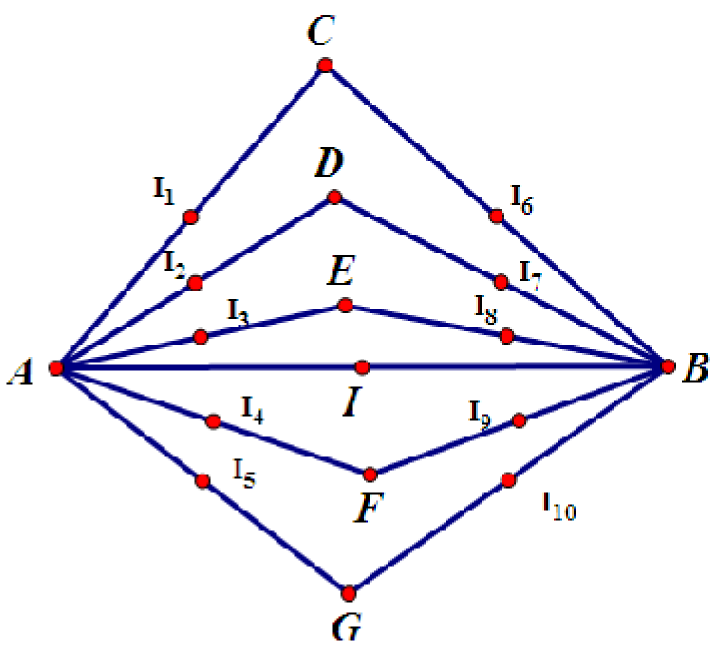
Gọi năm điểm còn lại là C, D, E, F, G và trung điểm của các đoạn thẳng $AC, AD, AE, \mathrm{AF}, AG$ lần lượt là I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.

Các điểm này không thể trùng nhau và thuộc đường tròn $(A; AI)$.

Tương tự gọi $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, BD, BE, BF, BG thì $I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}$ không trùng nhau và nằm trong đường tròn $(B; BI)$.

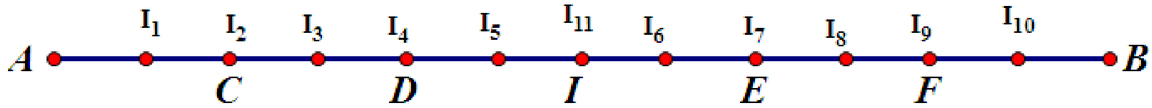
Như vậy có 11 trung điểm.

Cho nên có nhiều hơn 11 trung điểm của các đoạn thẳng ấy, hình 101.



Hình 101

Ta có hình 102 thỏa mãn là có 11 trung điểm.



Hình 102

Tóm lại có ít nhất 11 trung điểm.

Bài 2.41. Trên một đường tròn cho tám điểm, M là một trong các điểm đó. Xét tất cả các đa giác lồi có đỉnh là các điểm đã cho. Gọi A là tập hợp các đa giác nhận M làm đỉnh, B là tập hợp các đa giác không nhận M làm đỉnh. Hỏi tập A hay B có số phần tử nhiều hơn?

Lời giải. Nối M với hai điểm trong số bảy điểm còn lại ta được một tam giác. Vậy số tam giác là C_7^2.

Nối M với ba điểm trong bảy điểm còn lại ta được một tứ giác. Vậy số tứ giác là C_7^3.

Do đó số phần tử của tập hợp A là $C_7^2 + C_7^3 + ... + C_7^7$.

Bỏ M ra ta còn lại bảy điểm. Cứ nối ba điểm ta được một tam giác nên số tam giác không có đỉnh M là C_7^3.

Cứ như thế ta có số đa giác không có M làm đỉnh là $B = C_7^3 + ... + C_7^7$.

Như vậy số phần tử của tập A nhiều hơn số phần tử của tập B là C_7^2.

Bài 2.42. Cho một thập giác lồi.

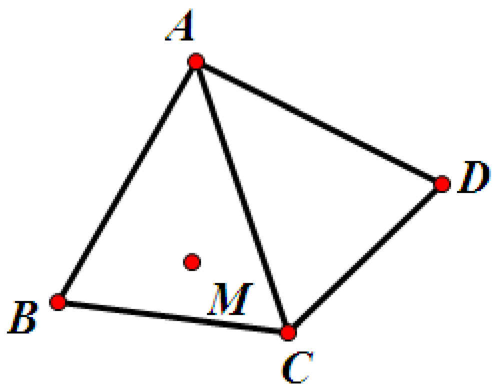
a) Có bao nhiêu tứ giác lồi có đỉnh là bốn trong các đỉnh của thập giác.

b) Gọi M là một điểm nằm trong thập giác nhưng không thuộc các đường chéo. Gọi số tứ giác chứa M bên trong là m, số tam giác chứa M bên trong là n. Chứng minh rằng m chia hết cho 7, còn n chia hết cho 2.

Lời giải

a) Cứ chọn bốn trong 10 điểm ta được một tứ giác nên số tứ giác là $C_{10}^4 = 210$.

b) Khi M thuộc một tứ giác thì có M thuộc hai tam giác. Cho nên số tam giác gấp hai lần số tứ giác và bằng $2m$. Vậy n chia hết cho 2.



Hình 103

Mặt khác, số tam giác nói trên được tính bảy lần. Vì nếu M thuộc ΔABC thì M thuộc bảy tứ giác tạo thành bằng cách chọn thêm một trong bảy điểm còn lại của thập giác.

Vậy số tam giác khác nhau chứa M là $n = \frac{2m}{7}$. Nên m chia hết cho 7.

Bài 2.43. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng. Biết không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số các miền được tạo thành và số các đa giác lồi trong các miền này.

Lời giải

Kí hiệu $S(n)$ là số miền mặt phẳng do n đường thẳng tạo ra.

Đường thẳng 1 chia mặt phẳng thành $1+1$ miền.

Đường thẳng 2 chia mặt phẳng thêm 2 miền.

Đường thẳng 3 chia mặt phẳng thêm 3 miền.

Đường thẳng thứ n cắt $n-1$ đường thẳng còn lại tạo thành $n-1$ giao điểm, chia đường thẳng thứ n thành n khoảng, mỗi khoảng này chia các miền chứa nó làm 2 miền.

Cứ như thế, đường thẳng n chia mặt phẳng thêm n miền.

Vậy số miền là $1+1+2+3+...+n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Vì số đường thẳng là hữu hạn nên tồn tại một đa giác bao các giao điểm của các đường thẳng.

Mỗi đường thẳng đã cho cắt các cạnh của đa giác bao tại hai điểm phân biệt tạo thành hai tia nằm ngoài đa giác bao.

Như vậy có $2n$ tia nằm ngoài đa giác bao, tạo thành $2n$ miền không bị chặn.

Vậy số miền bị chặn là $S(n) - 2n = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - 2n = \frac{n(n-3)}{2} + 1$.

2.6. Đánh giá độ dài, góc, diện tích

Bài 2.44. Nối một điểm M nằm trong một lục giác đều có cạnh 2 với các đỉnh của lục giác đều đó ta được sáu tam giác. Chứng minh rằng trong sáu tam giác ấy, tồn tại hai tam giác mà mỗi cạnh không nhỏ hơn 2.

Lời giải. Giả sử có một lục giác đều $ABCDEF$, tâm O.

+ Nếu M trùng với O thì bài toán được chứng minh.

+ Giả sử M nằm trong hoặc trên biên của ΔAOB.

Xét ΔEOD, ta có

$\widehat{MED} \geq 60^0; \widehat{MDE} \geq 60^0$ nên $\widehat{EMD} \leq 60^0$.

Khi đó

$ME \geq ED = 2; MD \geq ED = 2$.

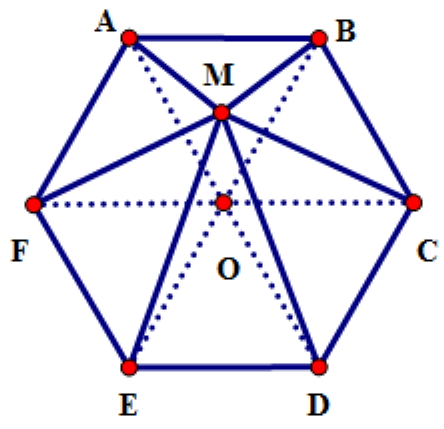
Vậy ΔMED có tất cả các cạnh không nhỏ hơn 2.

Ta sẽ chứng minh một trong hai tam giác có cạnh chung với ΔMED thỏa mãn bài toán, đó là ΔMEF hoặc ΔMCD.

$MF + MC \geq EC = 4$.

Do đó một trong hai cạnh MF, MC lớn hơn hoặc bằng 2.

Giả sử MF lớn hơn hoặc bằng 2 thì ΔMEF có tất cả các cạnh không nhỏ hơn 2. Ta có điều phải chứng minh.



Hình 104

Bài 2.45. Bên trong một hình vuông cạnh 1 có 20 điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{42}$.

Lời giải

Cách 1. Sau khi chia hình vuông thành các tam giác không có điểm trong chung sao cho đỉnh của tam giác là 20 điểm đã cho và bốn đỉnh của hình vuông. Mỗi điểm đã cho đều là đỉnh của ít nhất một trong các tam giác và số tam giác không chia thêm được nữa. Khi đó tổng các góc có đỉnh nằm trong hình vuông là

$20.4v = 80v$.

Tổng các góc của hình vuông là $4v$.

Do đó tổng các góc của tất cả các tam giác tạo thành là $84v$.

Cho nên số tam giác tạo thành là $\dfrac{84v}{2v} = 42$. Vậy tổng diện tích 42 tam giác là 1.

Từ đó, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\dfrac{1}{42}$.

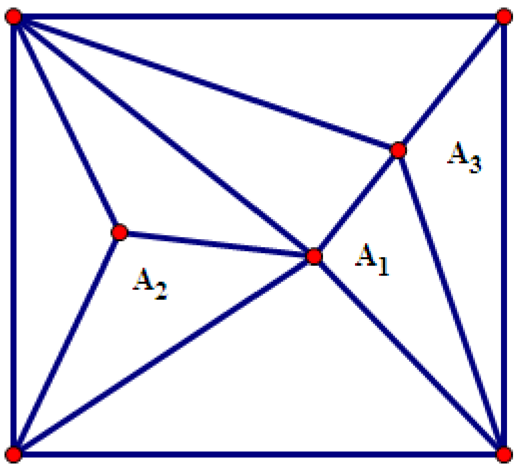
Cách 2. Gọi 20 điểm nằm trong hình vuông là $A_1, A_2, ..., A_{20}$.

+ Bước 1: Nối A_1 với các đỉnh của hình vuông ta được bốn tam giác.

+ Bước 2: Xét các điểm A_k với $k = \overline{2;20}$.

Nếu A_k nằm trong một tam giác đã tạo ra (chẳng hạn A_2 như hình), ta nối nó với ba đỉnh của tam giác đó. Số tam giác tăng thêm 2 (từ 1 lên 3).

Nếu A_k nằm trên cạnh chung của hai tam giác đã tạo ra thì ta nối nó với hai đỉnh đối diện cạnh đó. Số tam giác tăng thêm 2 (từ 2 thành 4).



Hình 105

Vậy sau bước 1 ta được 4 tam giác. Sau mỗi bước tiếp theo được thêm 2 tam giác. Như vậy tổng số tam giác là $4 + 2.19 = 42$.

Tổng diện tích 42 tam giác là 1 nên tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{42}$.

Tổng quát. Bên trong một hình vuông cạnh 1 có n điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{2n+2}$.

Chương 3

Một số đề thi có nội dung hình học tổ hợp

3.1. Đề thi tuyển sinh chuyên

Bài 3.1 (Đề thi tuyển sinh PTTH Chu Văn An và THPT Amsterdam 2003 - 2004 (vòng 2)). Lấy bốn điểm ở miền trong của một tứ giác để cùng với bốn đỉnh ta được tám điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám điểm đã cho có diện tích không quá $\frac{1}{10}$.

Tổng quát hóa bài toán cho n - giác lồi với n điểm nằm ở bên trong của đa giác đó.

Lời giải. Nối các điểm thành các tam giác sao cho không có hai tam giác nào có điểm trong chung và phủ vừa kín tứ giác.

Tổng các góc tạo thành là $20v$.

Cho nên số tam giác tạo thành là $\frac{20v}{2v} = 10$ (tam giác).

Theo nguyên lí Đirichlê, trong tứ giác có diện tích bằng 1, đặt 10 tam giác thì tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{10}$. Đó là điều cần chứng minh.

Tổng quát

Trong n - giác lồi có diện tích S, lấy m điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{S}{2m+n-2}$.

Chứng minh. Nối các điểm lại với nhau thành các tam giác sao cho không có hai tam giác nào có điểm trong chung và lấp đầy đa giác.

Khi đó tổng các góc tạo thành là $(4m+2n-4)v$.

Số tam giác tạo thành là $\dfrac{(4m+2n-4)v}{2v}=2m+n-2$ (tam giác).

Tổng diện tích các tam giác là S nên tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\dfrac{S}{2m+n-2}$.

- **Bài tương tự**

Bài 3.2. Bên trong một ngũ giác đặt sáu điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 10. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh lấy từ 11 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\dfrac{2}{3}$.

Bài 3.3 (Đề thi tuyển sinh PTTH Chu Văn An và THPT Amsterdam 2004 - 2005 (vòng 2))**.** Cho một đa giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng có một hình tròn bán kính $r=\dfrac{1}{4}$ chứa toàn bộ đa giác đó.

Lời giải

Trên biên đa giác lấy hai điểm M và N sao cho chúng chia biên của đa giác thành hai nửa có chu vi bằng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$.

Gọi O là trung điểm MN.

Xét đường tròn $\left(O;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lấy điểm A tùy ý trên biên đa giác thì

$$\frac{1}{2}\geq AM+AN. \quad (12)$$

Lấy B đối xứng với A qua O được $AMBN$ là hình bình hành, hình 115.

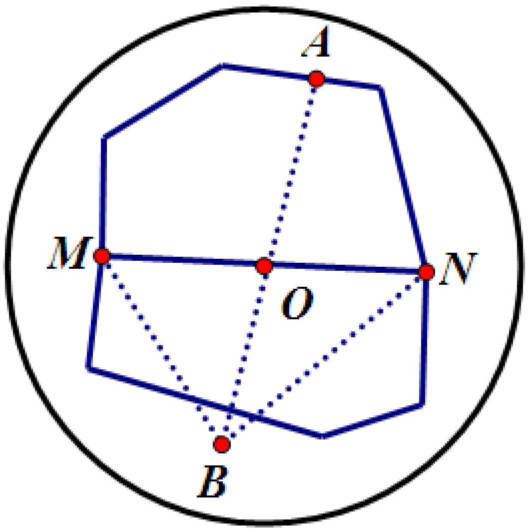
$$AM+AN=AM+MB\geq AB=2AO. \quad (13)$$

Từ (12) và (13) ta có

$$2AO \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow AO \le \frac{1}{4}.$$

Vậy A bị phủ bởi hình tròn $\left(O;\frac{1}{4}\right)$.

Với A là điểm bất kì trên biên của đa giác nên toàn bộ đa giác được chứa trong hình tròn $\left(O;\frac{1}{4}\right)$.



Hình 115

- **Bài tương tự**

Bài 3.4. Cho một đa giác có chu vi bằng 10. Chứng minh rằng có thể phủ kín đa giác bởi một hình tròn bán kính $r = \frac{5}{2}$.

Bài 3.5 (PTTH Chu Văn An và THPT Amsterdam 2005 - 2006 (vòng 2)). Cho hình vuông $ABCD$ và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

a) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

b) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông đã cho thành hai phần có tỉ số diện tích là $0,5$.

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường thẳng đồng quy.

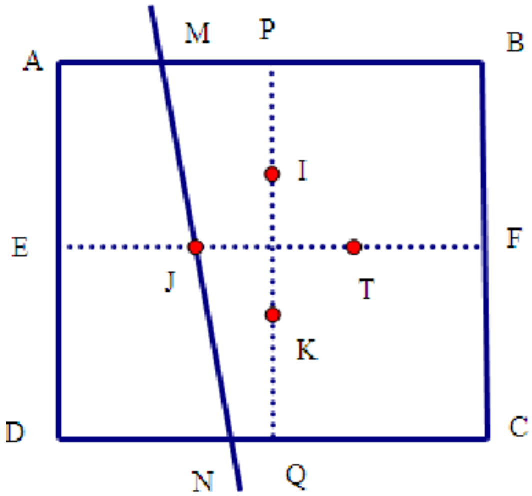
Lời giải

Ta có $\frac{S_{AMND}}{S_{MBCN}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{EJ}}{FJ} = \frac{1}{2}$. ($E$ và F lần lượt là trung điểm của AD và CB).

Vậy mỗi đường thẳng đã cho chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $1:2$.

Có bốn điểm chia đường trung bình của hình vuông theo tỉ số đó là I, J, K, T như hình vẽ trên. (với P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD).

$$\frac{\mathrm{EJ}}{JF} = \frac{FT}{TE} = \frac{PI}{IQ} = \frac{QK}{KP} = \frac{1}{2}.$$



Hình 116

Có 2005 đường thẳng đi qua 4 điểm nên theo nguyên lí Đirichlê, có ít nhất 502 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.6 (Đề thi tuyển sinh THPT chuyên tỉnh Thanh Hóa 2004 - 2005)**.** Có hay không 2003 điểm trên mặt phẳng mà bất kì ba điểm nào trong chúng đều tạo thành một tam giác có góc tù.

Lời giải. Ta chứng minh bài toán tổng quát sau

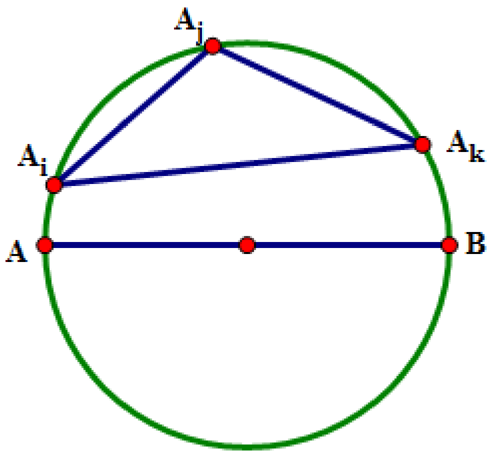
Với mọi số tự nhiên n lớn không nhỏ hơn 3, luôn tồn tại hệ n điểm mà ba điểm bất kì trong chúng đều tạo thành một tam giác có góc tù.

Vẽ nửa đường tròn đường kính AB, trên nửa đường tròn đó lấy n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ mà ba điểm bất kì trong chúng đều tạo thành một tam giác.

Trong $\Delta A_iA_jA_k$ chắc chắn có một góc tù (góc nội tiếp chắn cung lớn hơn của nửa đường tròn), hình 117.

Vậy luôn tồn tại n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn đề bài.

Trường hợp riêng của bài toán là $n = 2003$.



Hình 117

Bài 3.7 (Tuyển sinh chuyên, Đại học Khoa học tự nhiên, 2005 - 2006).

Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong sáu đỉnh bất kì của (H) luôn có bốn đỉnh là các đỉnh của một hình thang.

Lời giải

Ta chứng minh bài toán phụ sau

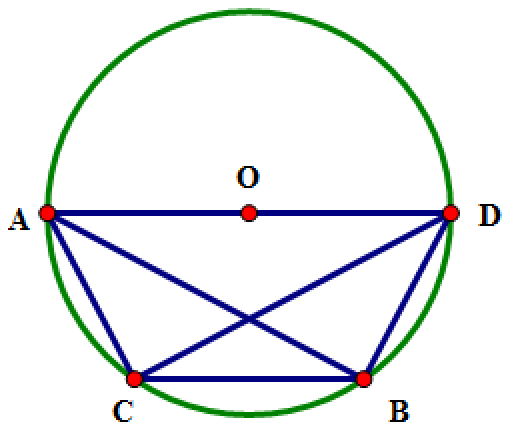
Nếu AB, CD là hai dây cung bằng nhau của một đường tròn (O) thì A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình thang.

Thật vậy

TH1. AB cắt CD. Khi đó

$\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}$, $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CBD}$.

Nên $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$ tức $ABCD$ là hình thang, hình 118.



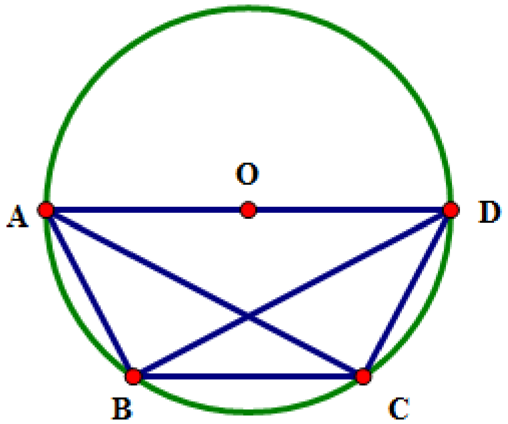
Hình 118

TH2. AB không cắt CD.

Vì $AB = CD$ nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Do đó $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ hay $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$.

Vậy $ABCD$ là hình thang, hình 119.



Hình 119

Gọi $A_1, A_2, ..., A_{14}$ là đa giác đều nội tiếp (O).

Đường chéo nối hai đỉnh đối xứng qua tâm của đa giác như $A_1A_8, A_2A_9, ..., A_7A_{14}$ gọi là đường chéo chính.

Các đường chéo xuất phát từ A_1 đối xứng với nhau qua A_1A_8 thì bằng nhau. Vậy có 11 đường chéo xuất phát từ A_1 nên có sáu độ dài khác nhau.

Tương tự với các đường chéo chính khác.

Lại dựa trên tính chất đa giác đều nên với tất cả các đường chéo của đa giác, chỉ có sáu độ dài đôi một khác nhau.

Với sáu điểm bất kì của đa giác, tạo ra số đoạn thẳng là $\frac{6.5}{2} = 15$, trong đó nhiều nhất năm đoạn thẳng là cạnh đa giác. Do đó có ít nhất 10 đoạn thẳng là đường chéo. Mà có sáu độ dài khác nhau nên ít nhất hai đường chéo có cùng độ dài. Tứ giác tạo bởi các đầu mút của hai đường chéo đó thỏa mãn là hình thang.

Bài 3.8 (Đề thi tuyển sinh THPT chuyên, Đại học Khoa học tự nhiên, 2006 - 2007). Chứng minh rằng đa giác lồi $2n$ cạnh $n \in ¥, n \geq 2$ luôn có ít nhất n đường chéo không song song với bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Lời giải

Giả sử tất cả các đường chéo của đa giác đều song song với một cạnh nào đó của đa giác.

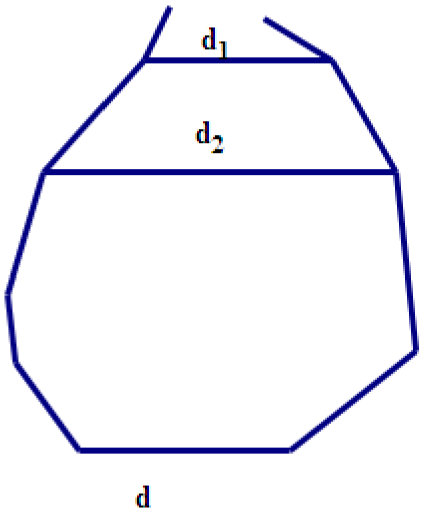
Số đường chéo là

$\frac{2n(2n-3)}{2} = 2n(n-2)+n$.

Vậy thấy $2n(n-2)+n$ khi chia cho $2n$ được $n-2$ dư n.

Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại $n-1$ đường chéo cùng song song với một cạnh d của đa giác.

Gọi d_1 là đường chéo xa d nhất, hình 118.



Hình 118

Với cạnh d và $n-1$ đường chéo, ta đã có $2+2(n-1)=2n$ đỉnh của đa giác.

Như vậy d_1 phải là cạnh của đa giác chứ không phải là đường chéo.

Điều này trái với cách gọi d_1 nên tồn tại một đường chéo không song song với cạnh nào của đa giác.

Xét cạnh A_1A_{2n} của đa giác. Vậy có nhiều nhất $n-2$ đường chéo cùng song song với A_1A_{2n}.

Cho nên với $2n$ cạnh, số đường chéo song song với các cạnh của đa giác nhiều nhất là $2n(n-2)=2n^2-4n$.

Mà có $2n^2-4n+n$ đường chéo nên số đường chéo không song song với cạnh nào của đa giác không ít hơn $(2n^2-4n+n)-(2n^2-4n)=n$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.9 (Đề thi tuyển sinh PTTH chuyên KHTN 2008 - 2009 (vòng 2)). Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh $6cm$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}$ cm.

Lời giải

Giả sử ΔABC đều cạnh $6cm$.

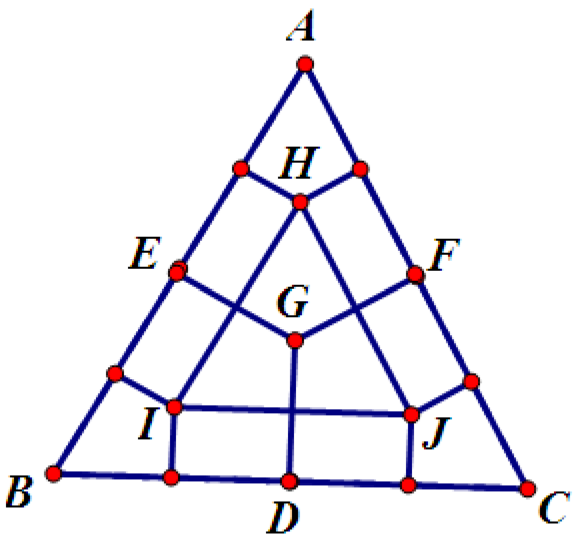
Chia tam giác ΔABC thành 12 phần như hình vẽ với

+ D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB, AC.

+ G là trọng tâm ΔABC.

+ H, I, J lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG, hình 119.

Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại ít nhất hai điểm trong 13 điểm đã cho cùng thuộc một hình nhỏ.



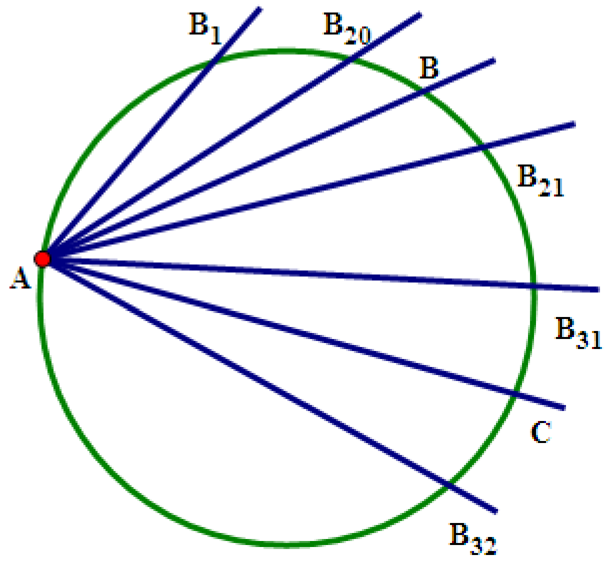
Hình 119

Đường kính mỗi hình nhỏ không quá $\sqrt{3}$ cm, hai điểm đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3.10 (Đề thi vào chuyên Hùng Vương 2000 - 2001). Trong đường tròn lấy 2031 điểm tùy ý. Chứng minh rằng có thể chia hình tròn này thành ba phần bởi hai dây cung sao cho phần thứ nhất có 20 điểm, phần thứ hai có 11 điểm, phần thứ ba có 2000 điểm.

Lời giải

Vì số điểm là hữu hạn nên số các đường thẳng đi qua hai trong 2031 điểm đó là hữu hạn. Do đó số giao điểm của các đường thẳng đó với đường tròn là hữu hạn. Vì vậy, tồn tại điểm A thuộc đường tròn nhưng không nằm trên bất kì đường thẳng nào trong số đang xét.



Hình 120

Vẽ các tia gốc A đi qua 2031 điểm đã cho, các tia này cắt đường tròn tại các điểm $B_1, B_2, ..., B_{2031}$ (theo chiều kim đồng hồ kể từ A), hình 120.

Rõ ràng các tia này là phân biệt.

Vẽ tia nằm giữa hai tia AB_{20} và tia AB_{21} cắt đường tròn tại B, tia nằm giữa hai tia AB_{31} và AB_{32} cắt đường tròn tại C.

Các dây AB và AC thỏa mãn đề bài.

3.2. Đề thi học sinh giỏi

Bài 3.11 (Hà Nội 2011 - 2012)**.** Cho 8045 điểm trên một mặt phẳng sao cho cứ ba điểm bất kì tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng luôn có thể có ít nhất 2012 điểm nằm trong tam giác hoặc trên cạnh của tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

Lời giải

Cách 1. Chọn hai điểm có khoảng cách lớn nhất trong 8045 điểm đã cho, giả sử khoảng cách đó là x.

Vì các tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 nên các điểm đã cho nằm trong một hình chữ nhật có cạnh là $\frac{2}{x}.2=\frac{4}{x}$.

Chia hình chữ nhật đó thành bốn phần bởi các đường chéo. Mỗi phần có diện tích nhỏ hơn $\frac{\frac{4}{x}.x}{4}=1$. Mà theo nguyên lí Đirichlê, 8045 chia 4 được 2011 dư 1 nên tồn tại một phần chứa ít nhất 2012 điểm đã cho.

Cách 2. Xét tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là ΔABC.

Qua A,B,C kẻ các đường thẳng song song với các cạnh đối diện ta được ba tam giác có diện tích đúng bằng diện tích ΔABC.

Nếu có điểm nào nằm ngoài bốn tam giác trên thì nối điểm đó với cạnh đối diện thuộc ΔABC sẽ tạo thành tam giác mới có diện tích lớn hơn diện tích ΔABC. Điều này vô lí.

Vậy tất cả 8045 điểm nằm trong bốn tam giác đó. 8045 chia 4 được 2011 dư 1 nên tồn tại một tam giác chứa ít nhất 2012 điểm đã cho.

Bài 3.12 (Đề thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội, 5/4/2013)**.** Cho 2013 điểm $A_1, A_2, ..., A_{2013}$ và đường tròn $(O;1)$ tùy ý nằm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại điểm M trên đường tròn sao cho $MA_1+MA_2+...+MA_{2013}\geq 2013$.

Hướng giải

Tương tự **Bài 2.108.**

Tương tự

Bài 3.13. Cho 2020 điểm $A_1, A_2, ..., A_{2020}$ và đường tròn $(O;2)$ tùy ý nằm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại điểm M trên đường tròn sao cho

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2020} \geq 4040.$$

3.3. Đề thi đề nghị Olympic truyền thống 30/4 lần XX - năm 2014

Bài 3.14 (THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang)**.** Mỗi đỉnh của một cửu giác đều được tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác có đỉnh là đỉnh của cửu giác, đồng dạng với nhau và các đỉnh của chúng được tô cùng một màu.

Lời giải. Ta gọi một tam giác đỏ (xanh) nếu tất cả các đỉnh của chúng được tô cùng một màu đỏ (xanh).

Chín đỉnh của cửu giác được tô bởi hai màu nên có ít nhất năm đỉnh được tô cùng màu, giả sử năm đỉnh đó tô màu đỏ. Vậy có ít nhất $C_5^3 = 10$ tam giác đỏ.

Kí hiệu T là tập hợp của 10 tam giác này. Ta sẽ chứng minh trong 10 tam giác này có hai tam giác đồng dạng với nhau.

Giả sử có cửu giác với các đỉnh theo thứ tự $A_1, A_2, ..., A_9$ nội tiếp đường tròn (O), chia đường tròn thành chín cung bằng nhau, mỗi cung nhỏ này gọi là một "lá".

Xét tam giác $A_iA_jA_k$ với $A_iA_j \leq A_jA_k \leq A_kA_i$. Gọi a_{ij}, a_{jk}, a_{ki} là số lá trên các cung tương ứng $\overset{\frown}{A_iA_j}, \overset{\frown}{A_jA_k}, \overset{\frown}{A_kA_i}$. Khi đó mỗi tam giác $A_iA_jA_k$ tương ứng với bộ số $(a_{ij}; a_{jk}; a_{ki})$ thỏa mãn $1 \leq a_{ij} \leq a_{jk} \leq a_{ki} \leq 7$ và $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 9$.

Chia T thành các tập con T_i mà mỗi tập con T_i chứa các tam giác đồng dạng thuộc T. Như vậy mỗi T_i tương ứng với một bộ số là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 1 \leq x \leq y \leq z \leq 7 \\ x, y, z \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$ (14) và ngược lại.

Hệ (14) có bảy bộ nghiệm là $(1;1;7), (1;2;6), (1;3;5), (1;4;4), (2;2;5), (2;3;4), (3;3;3)$.

Vậy có bảy tập T_i, mà trong T có 10 tam giác nên có ít nhất hai tam giác thuộc cùng một tập T_i. Hai tam giác này thỏa mãn bài toán.

Bài 3.15. Cho hình vuông có cạnh bằng 20. Bên trong hình vuông chọn 2010 điểm. Xét tập hợp A có 2014 điểm gồm 4 đỉnh hình vuông và 2010 điểm vừa chọn. Chứng minh rằng, tồn tại ít nhất một tam giác có ba đỉnh thuộc A với diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{10}$.

Hướng dẫn giải

Xem **Bài 3.1**.

Bài 3.16 (THPT chuyên Long An - Long An)**.** Có 32 hạt mè trên bề mặt hình vuông cạnh $8cm$ của một chiếc bánh. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt mè có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn $2cm$.

Lời giải

Lấy mỗi hạt mè làm tâm dựng hình tròn bán kính $1cm$. Các hình này nằm trọn trong hình vuông có cạnh $10cm$ là mở rộng của hình vuông $8cm$ về mỗi phía $1cm$.

Tổng diện tích của các hình tròn nhỏ là $32\pi > 100$ là diện tích hình vuông mở rộng. Vậy có hai hình tròn có điểm chung và khoảng cách giữa tâm của chúng nhỏ hơn $2cm$.

Bài 3.17 (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên)**.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 14cm$, trong hình vuông đó có đánh dấu 76 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng $2cm$ chứa ít nhất bốn điểm trong số các điểm trên.

Hướng dẫn giải. Chia hình vuông $ABCD$ thành 25 hình vuông có cạnh bằng $\frac{14}{5}$ cm. Khi đó có một hình vuông chứa ít nhất bốn điểm. Ta chứng minh bán kính hình tròn ngoại tiếp hình vuông nhỏ đó nhỏ hơn $2cm$.

Bài 3.18 (THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Vĩnh Long)**.** Trong hình chữ nhật kích thước 1×2 ta lấy $6n^2+1$ điểm, với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn bốn điểm trong số các điểm đã cho.

Hướng dẫn giải

Chia hình chữ nhật thành hai hình vuông 1×1. Khi đó tồn tại một hình vuông 1×1 chứa ít nhất $3n^2+1$ điểm.

Xét hình vuông chứa ít nhất $3n^2+1$ điểm, chia mỗi cạnh hình vuông thành n đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Khi đó tạo được n^2 hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$. Tiếp tục chia $3n^2+1$ điểm vào n^2 hình vuông thì tồn tại một hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ chứa ít nhất bốn điểm.

Gọi hình vuông có chứa ít nhất bốn điểm đó là $ABCD$, tâm O.

Đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính $OA=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2n}<\frac{1}{n}$.

Do đó hình tròn tâm O bán kính $\frac{1}{n}$ chứa cả hình vuông $ABCD$ tức là chứa cả bốn điểm trên. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 3.19 (THPT chuyên Trần Hưng Đạo - Bình Thuận)**.** Cho một đa giác đơn (không nhất thiết lồi) có chu vi 12. Chứng minh rằng có thể phủ kín đa giác bằng một hình tròn có bán kính bằng 3.

Hướng dẫn giải

Xem **Bài 3.3**.

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau

- Luận văn đã hệ thống và phân loại một số phương pháp và một số dạng toán thường gặp về hình học tổ hợp.
- Luận văn đã sưu tập được nhiều bài toán hình học tổ hợp hay trong các kì thi học sinh giỏi Trung học cơ sở, Olympic 30/4.

Dù đã có cố gắng hết sức trong quá trình làm luận văn, nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Em rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bài giảng Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh, trình bày tại chương trình Gặp gỡ toán học 2010 do ĐHQG Tp.HCM tổ chức từ ngày 25/1-31/1/2010.
2. Vũ Hữu Bình, Các bài toán hình học tổ hợp dùng cho bậc trung học cơ sở, NXB Giáo Dục, tái bản lần thứ hai.
3. http://diendantoanhoc.net/.
4. http://tailieu.vn/.
5. Nguyễn Mạnh Hà - Đoàn Thanh Tùng - Vũ Hữu Khương, Giới thiệu đề thi tuyển sinh Trung học phổ thông chuyên, Nhà xuất bản Hà Nội, 2011.
6. Nguyễn Hữu Điển, Một số chuyên đề hình học tổ hợp, NXB Giáo Dục, 2005.
7. Vũ Đình Hòa, Một số kiến thức cơ sở hình học tổ hợp, NXB Giáo Dục, 2001.

DANH MỤC CÁC TỪ VIẾT TẮT

1. TH1: Trường hợp 1.
2. TH2: Trường hợp 2.
3. THPT: Trung học phổ thông.
4. PTTH : Phổ thông trung học.
5. KHTN: Khoa học tự nhiên.