ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

VŨ THỊ MỪNG

PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THEO PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHÚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn: PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn

Hà Nội - 2016

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

VŨ THỊ MỪNG

PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THEO PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHÚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn: PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn

Hà Nội - 2016

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn người đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành luận văn này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn tốt nghiệp.

Hà Nội, ngày 10 tháng 10 năm 2016

Học viên

Vũ Thị Mừng

Mục lục

Tài liệu tham khảo 83

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay cùng với việc đổi mới toàn diện cách kiểm tra đánh giá năng lực của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo. Chủ trương giảm tải chương trình sách giáo khoa cùng với việc đổi mới cách thức tổ chức một kì thi quốc gia. Thì việc chú trọng rèn luyện phương pháp tự học là rất cần thiết. Đối với bộ môn Toán công việc của giáo viên là hướng dẫn học sinh công thức để học sinh tự giải bài tập đó phát huy tính tích cực trong học tập của học sinh.

Đối với chương trình toán trung học phổ thông thì phương trình lượng giác là một nội dung quan trọng vì trong các kỳ thi tuyển sinh đại học hầu như năm nào cũng có một câu giải phương trình lượng giác. Việc giảng dạy lượng giác đã được đưa vào chương trình ngay từ lớp 10 bậc trung học phổ thông, trong đó phần kiến thức về phương trình lượng giác chiếm vai trò trọng tâm. Kèm theo đó học toán lượng giác cũng giúp học sinh mở rộng tư duy vì một bài lượng giác có nhiều cách giải. Số lượng công thức lượng giác cần nhớ khá nhiều do đó đòi hỏi học sinh phải làm nhiều bài tập để nhớ kiến thức. Tuy nhiên, do thời gian hạn hẹp của chương trình phổ thông, không nêu được đầy đủ chi tiết tất cả các dạng bài toán về phương trình. Vì vậy học sinh gặp nhiều khó khăn khi giải các bài toán nâng cao về phương trình lượng giác trong các đề thi. Mặc dù đã có nhiều tài liệu tham khảo về lượng giác với các nội dung khác nhau, nhưng chưa có chuyên đề riêng khảo sát về phương trình một cách hệ thống. Đặc biệt, nhiều dạng toán về đại số và lượng giác có quan hệ chặt chẽ, khăng khít với nhau, không thể tách rời được. Nhiều bài toán lượng giác cần có sự trợ giúp của đại số, giải tích và ngược lại, ta có thể dùng lượng giác để giải một số bài toán về phương trình và hệ phương trình trong đại số thông qua cách đặt ẩn phụ là những hàm lượng giác.

Do đó, để đáp ứng nhu cầu về giảng dạy, học tập và góp phần nhỏ bé vào sự nghiệp giáo dục, luận văn "Phân loại phương trình lượng giác theo phương pháp giải chúng" nhằm hệ thống các kiến thức cơ bản về phương trình lượng giác kết hợp với kiến thức đại số, giải tích để tổng hợp, chọn lọc và phân loại các phương trình theo phương pháp giải chúng.

Bố cục của luận văn bao gồm 3 chương:

Chương 1. Một số kiến thức cơ bản

- Nhắc lại kiến thức cơ bản của các hàm số lượng giác.
- Nhắc lại khái niệm đa thức lượng giác và một số tính chất.

Chương 2. Một số loại phương trình lượng giác

- Phân loại phương trình lượng giác theo phương pháp giải.
- Một số ví dụ cho từng phương pháp.
- Bài tập ứng dụng.

Chương 3. Một số ứng dụng của lượng giác trong đại số

- Trình bày một số ứng dụng của lượng giác trong đại số.
- Trình bày một số ví dụ ứng với từng dạng toán.
- Một số bài tập tương tự.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm luận văn không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Em mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc. Xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 10 tháng 10 năm 2016

Học viên

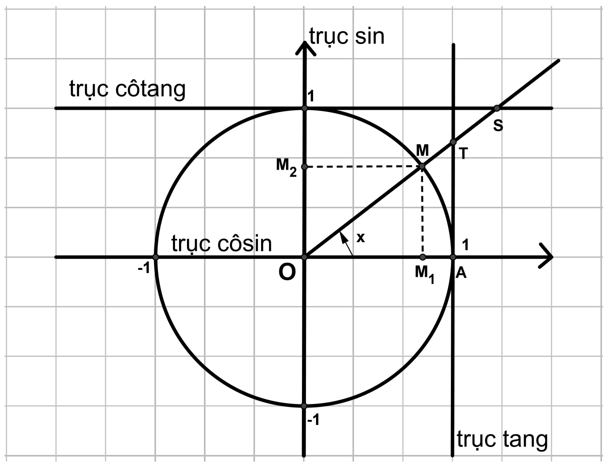
Vũ Thị Mừng

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

1.1 Các hàm số lượng giác

Nhiều hiện tượng tuần hoàn đơn giản trong thực tế được mô tả bởi những hàm lượng giác. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản nhất về các hàm số lượng giác, đa thức lượng giác.



Hình 1.1: *Đường tròn lượng giác*

1.1.1 Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

a) Định nghĩa 1.1.1

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với côsin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là $y = \cos x$.

Nhận xét

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ vì $\sin(-x) = -\sin x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn vì $\cos(-x) = \cos x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

b) Tính tuần hoàn

Ta đã biết, với mỗi số nguyên k, số $k2\pi$ thỏa mãn

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng số T sao cho

$$\sin(x + T) = \sin x \text{ với mọi } x$$

phải có dạng $T = k2\pi, k$ là một số nguyên.

Rõ ràng, trong các số dạng $k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, số dương nhỏ nhất là 2π.

Vậy đối với hàm số $y = \sin x$, số $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$\sin(x + T) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Hàm số $y = \cos x$ cũng có tính chất tương tự.

Ta nói hai hàm số đó là những hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

c) Tập giá trị và tập xác định

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ nghĩa là tập xác định của hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ là $D = \mathbb{R}$.

- Khi x thay đổi, hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1; 1]$. Ta nói tập giá trị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là đoạn $[-1; 1]$.

d) Vài giá trị đặc biệt

x	0^o 0	90^o $\frac{\pi}{2}$	180^o π	270^o $\frac{3\pi}{2}$	360^o 2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

1.1.2 Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

a) Định nghĩa 1.1.2

- Với mỗi số thực x mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Đặt $D_1 = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

  Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$.

- Với mỗi số thực x mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Đặt $D_2 = \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

  Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$.

Nhận xét

- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ vì nếu $x \in D_1$ thì $-x \in D_1$ và $\tan x = -\tan x$.

- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ vì nếu $x \in D_2$ thì $-x \in D_2$ và $\cot x = -\cot x$.

b) Tính chất tuần hoàn

Có thể chứng minh rằng $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$\tan(x + T) = \tan x \text{ với mọi } x \in D_1,$$

và $T = \pi$ cũng là số dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$\cot(x + T) = \cot x \text{ với mọi } x \in D_2.$$

Ta nói các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì π.

c) Tập xác định

Hàm số	Xác định khi	Tập xác định
$\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$D = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\cot x$	$x \neq k\pi$	$D = \mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) Vài giá trị đặc biệt

x	0^o 0	90^o $\frac{\pi}{2}$	180^o π	270^o $\frac{3\pi}{2}$	360^o 2π
$\tan x$	0	$\|\|$	0	$\|\|$	0
$\cot x$	$\|\|$	0	$\|\|$	0	$\|\|$

Nhận xét

- Khi $\tan x = 0$ thì $\cot x$ không xác định và đảo lại:
- Khi $\cot x = 0$ thì $\tan x$ không xác định.

1.1.3 Bài tập

Bài 1.1.1. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ với cung x bằng $390^o, -420^o, 810^o$.

Lời giải. Phương hướng chung để giải bài tập này là ta đưa cung x về dạng $x = x_0 + k360^o$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $|x_0| < 180^o$, từ đó tìm vị trí đầu cung của x và tính các giá trị lượng giác cần tìm.

a) Ta có: $x = 390^o = 30^o + 1.360^o$.

Vậy:

- $\sin x = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$.
- $\cos x = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan x = \tan 30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- $\cot x = \cot 30^o = \sqrt{3}$.

b) Ta biểu diễn x dưới dạng sau: $x = -420^o = -60^o - 1.360^o$.

Vậy:

- $\sin x = \sin(-60^o) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos x = \cos(-60^o) = \dfrac{1}{2}$.
- $\tan x = \tan(-60^o) = -\sqrt{3}$.
- $\cot x = \cot(-60^o) = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

c) Ta có: $x = 810^o = 90^o + 2.360^o$.

Vậy:

- $\sin x = \sin 90^o = 1$.
- $\cos x = \cos 90^o = 0$.
- $\tan x$ không xác định.
- $\cot x = 0$.

□

Bài 1.1.2. Xác định x (rađian) để các hàm số sau được xác định:

a) $y = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$;

b) $y = \sqrt{\cot^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1}$.

Lời giải. a) Hàm số $y = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$ xác định khi và chỉ khi:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \neq 0.$$

Tức là $x \neq \dfrac{-\pi}{12} - k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy hàm số $y = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$ xác định khi và chỉ khi $x \neq \dfrac{-\pi}{12} - k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \sqrt{\cot^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1}$ xác định khi và chỉ khi

Hàm số $\cot\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ được xác định.

Tức là $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$.

Hay $x \neq \dfrac{-\pi}{6} + k\pi$.

Vậy hàm số $y = \sqrt{\cot^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1}$ xác định khi và chỉ khi $x \neq \dfrac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

Bài 1.1.3. Chứng minh rằng các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số:

a) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

Lời giải. a) Ta có

$$y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

đó là một hàm số tuần hoàn với chu kì π. Nó cũng là một hàm số chẵn.

b) Ta có

$$y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ với mọi } x$$

nên y là một hàm hằng, do đó với mọi số T ta có

$$\cos^2(x+T)+\sin^2(x+T)=\cos^2 x+\sin^2 x \text{ với mọi } x$$

đó là một hàm số tuần hoàn nhưng không có chu kì (trong các số T dương không có số T nhỏ nhất). Hàm hằng là hàm số chẵn. □

1.2 Đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.3 Hàm số có dạng

$$A_n(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

trong đó a_n và b_n không đồng thời bằng 0 (tức là $a_n^2+b_n^2>0$), $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ với $i=0,1,2,...,n$; $j=0,1,2,...,n$ được gọi đa thức lượng giác bậc $n(n\in N^*)$.
Khi tất cả các $a_i=0$ với $i=1,2,...,n$ ta có

Định nghĩa 1.1.4 Hàm số có dạng

$$S_n(x)=b_0+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx \quad (b_n\neq 0),$$

được gọi là đa thức lượng giác bậc n theo sin.
Tương tự khi tất cả các $b_j=0$ với $j=1,2,...,n$ ta có

Định nghĩa 1.1.5 Hàm số có dạng

$$C_n(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx \quad (a_n\neq 0),$$

được gọi là đa thức lượng giác bậc n theo cosin.
Sau đây ta liệt kê một số tính chất đơn giản của đa thức lượng giác.

Tính chất 1.1. Tổng của hai đa thức lượng giác A_n và B_m là một đa thức lượng giác có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $max\{n,m\}$.

Tính chất 1.2. Tích của hai đa thức lượng giác A_n và B_m là một đa thức lượng giác có bậc bằng $n+m$.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức lượng giác

$$A_n(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

đồng nhất bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì tất cả các hệ số của nó đều bằng 0, tức là

$$a_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_n = b_n = 0.$$

Ví dụ 1.2.1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin^{2p} x$ (p là số tự nhiên) là một đa thức lượng giác theo cosin .

Lời giải. Từ công thức $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ dễ dàng suy ra

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Do đó

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p},$$

suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}.\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k.e^{ikx}.e^{-i(2p-k)x}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}.\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k.e^{2ikx-2ipx} + \sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k.e^{2i(k-p)x}\right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}.\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k\left(e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x}\right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\\
&= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k.\cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.
\end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là một đa thức lượng giác bậc $2p$ theo cosin. □

Ví dụ 1.2.2. Biểu diễn các hàm số $\sin^n x$ và $\cos^n x$ dưới dạng các đa thức lượng giác.

Lời giải. Giả sử $z = \cos t + i\sin t$. Khi đó

$$z^{-1} = (\cos t + i\sin t)^{-1} = \cos t - i\sin t.$$

Do đó

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2} \qquad \text{và} \qquad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Ta có

$$\left(z + z^{-1}\right)^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + C_n^{n-1} z z^{-n+1} + z^{-n}$$

$$= \begin{cases} \left(z^n + z^{-n}\right) + C_n^1 \left(z^{n-2} + z^{-(n-2)}\right) + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}} & \text{(nếu n chẵn)} \\ \left(z^n + z^{-n}\right) + C_n^1 \left(z^{n-2} + z^{-(n-2)}\right) + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \left(z + z^{-1}\right) & \text{(nếu n lẻ)} \end{cases}$$

Và

$$\left(z - z^{-1}\right)^n = z^n - C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + (-1)^n z^{-n}$$

$$= \begin{cases} \left(z^n + z^{-n}\right) - C_n^1 \left(z^{n-2} + z^{-(n-2)}\right) + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \\ \left(z^n + z^{-n}\right) - C_n^1 \left(z^{n-2} - z^{-(n-2)}\right) + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} \left(z + z^{-1}\right). \end{cases}$$

$\square$

Vậy

$$\cos^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + \dfrac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}\right] & \text{(n chẵn)} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \left[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x\right] & \text{(n lẻ).} \end{cases}$$

$$\sin^n x = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \left[2\cos nx - 2C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}\right] \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \left[2\sin nx - 2iC_n^1 \sin(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2\sin x\right]. \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Tuấn (2008), *Chuyên đề chọn lọc: Dãy số và áp dụng.*

[2] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[3] Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), Nguyễn Hữu Độ, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng (2008), *Lượng giác*, NXB Giáo dục.

[4] Trần Đức Huyên, Lê Mậu Thống, Lê Mậu Thảo (1998), *Phương pháp giải toán lượng giác luyện thi vào đại học*, NXB Trẻ.

[5] Vũ Thế Hựu (2002), *Phương pháp lượng giác hóa*, NXB Giáo dục.

[6] http://luanvan.net.vn/luan-van/luan-van-mot-so-phuong-phap-giai-phuong-trinh-va-bat-phuong-trinh-luong-giac-51715/