ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

\- - - - - - - - - - -

Phạm Thị Gấm

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN NGƯỢC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2014

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

———————————

Phạm Thị Gấm

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN NGƯỢC

Chuyên ngành: **TOÁN ỨNG DỤNG**

Mã số: **60.46.0112**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS.TSKH. PHẠM KỲ ANH

Hà Nội - 2014

Mục lục

BẢNG KÍ HIỆU

$\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$	Không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ $\mathcal{X}$ vào $\mathcal{Y}$.
$\mathcal{C}[a,b]$	Không gian các hàm số thực liên tục trên $[a,b]$.
$\mathcal{D}(T)$	Miền xác định của T.
dim	Số chiều của không gian.
I	Toán tử đơn vị.
inf	Cận dưới đúng.
$\mathcal{L}^2[a,b]$	Không gian các hàm số bình phương khả tích trên $[a,b]$.
$\mathcal{N}(T)$	Tập không điểm của T.
$\mathcal{R}(T)$	Miền giá trị của T.
R_α	Toán tử hiệu chỉnh.
(R_α,α)	Phương pháp hiệu chỉnh
sup	Cận trên đúng.
$T^\dagger$	Toán tử nghịch đảo suy rộng của T.
T^*	Toán tử liên hợp của T.
$x^\dagger$	Nghiệm suy rộng.
α	Tham số hiệu chỉnh.

Mở đầu

Trong các ứng dụng thực tế thường nảy sinh các bài toán ngược, khi biết các dữ liệu đầu ra cần khôi phục lại dữ liệu đầu vào, hoặc khi biết dữ liệu vào-ra phải nhận dạng các tham số của hệ thống. Các bài toán trong chụp ảnh cắt lớp, khôi phục ảnh, dự báo đường huyết trong điều trị bệnh tiểu đường, vv... là những bài toán ngược thường gặp.

Bài toán ngược nói chung là bài toán đặt không chỉnh, tức là, nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu của bài toán. Các phương pháp giải số ổn định bài toán đặt không chỉnh bằng cách đưa về những bài toán đặt chỉnh được gọi là các phương pháp hiệu chỉnh. Trong luận văn này em xin trình bày về một số phương pháp hiệu chỉnh giải bài toán ngược tuyến tính.
Luận văn gồm 3 chương:

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

  Trong chương này, em nhắc lại một số khái niệm cơ bản của giải tích hàm, bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh.

- Chương 2: Toán tử hiệu chỉnh

  Trong chương này, em trình bày các khái niệm về toán tử hiệu chỉnh, cấp tối ưu và các định lí liên quan.

- Chương 3: Các phương pháp hiệu chỉnh liên tục

  Chương này trình bày về toán tử hiệu chỉnh liên tục, qui tắc chọn tham số tiên nghiệm, nguyên lý độ lệch,qui tắc chọn tham số hậu nghiệm cải tiến.

Lời cảm ơn

Trước tiên, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Phạm Kỳ Anh, người đã trực tiếp hướng dẫn và tận tình chỉ bảo em trong suốt quá trình em học tập và thực hiện luận văn.

Em cũng xin cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán - Cơ - Tin học cùng toàn thể các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, phòng Sau đại học, trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên - Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các đồng nghiệp, gia đình và bạn bè đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện về mọi mặt trong quá trình tôi học tập và làm luận văn.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm luận văn em không tránh khỏi những sai sót. Em rất mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 10 tháng 11 năm 2014

Học viên

Phạm Thị Gấm

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, tôi sẽ nhắc lại một số kết quả cơ bản của giải tích hàm cũng như trình bày một số khái niệm về bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh.

1.1 Một số kết qủa cơ bản của giải tích hàm

1.1.1 Không gian

Cho $\mathcal{X}$ là một không gian tuyến tính trên trường số thực hoặc phức $\mathbb{K}$. Các phần tử của $\mathcal{X}$ gọi là các **véc tơ**, các phần tử của $\mathbb{K}$ là các **vô hướng**.

Một chuẩn trên không gian tuyến tính $\mathcal{X}$ là một hàm giá trị thực không âm

$$x \longrightarrow \|x\|, x \in \mathcal{X},$$

thỏa mãn:

(i) $\forall x \in \mathcal{X}, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{K},$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathcal{X}.$

Một không gian tuyến tính với một chuẩn được gọi là **không gian tuyến tính định chuẩn**. Dễ thấy ánh xạ

$$(x, y) \longrightarrow \|x - y\|, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

xác định một mêtric trên $\mathcal{X}$.

Một không gian tuyến tính định chuẩn và đầy đủ được gọi là **không gian**

Bannach.

Xét không gian tuyến tính $\mathcal{X}$ với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và ánh xạ

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

trên $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ thỏa mãn các tính chất:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{X}$,

(ii) $\forall x \in \mathcal{X}, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathcal{X}$,

(iv) $\langle x + y, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle, \forall x, y, u \in \mathcal{X}$,

(v) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in \mathcal{X}$.

Một không gian tuyến tính cùng với tích vô hướng trên nó gọi là **không gian có tích vô hướng**. Một trong những bất đẳng thức quan trọng trên không gian có tích vô hướng là *Bất đẳng thức Schwarz* hay còn gọi là *Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz.*

Bất đẳng thức Schwarz: với mọi x, y trong không gian tích vô hướng

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Sử dụng bất đẳng thức Schwarz suy ra ánh xạ

$$x \longrightarrow \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in \mathcal{X},$$

xác định một chuẩn trên $\mathcal{X}$. Nếu $\mathcal{X}$ là đầy đủ với metric xác định bởi chuẩn này thì $\mathcal{X}$ được gọi là **không gian Hilbert**.

Bất đẳng thức Holder : với $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ trong $\mathbb{K}^n$ và $1 < p < \infty$, ta có

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j \overline{\beta_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^p \right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^q \right)^{\dfrac{1}{q}},$$

trong đó $q > 0$ sao cho $p + q = pq$. Các phần tử x, y trong không gian có tích vô hướng được gọi là trực giao với nhau nếu $\langle x, y \rangle = 0$. Ta ký hiệu là $x \perp y$.

Định lí Pytago: Cho $\mathcal{X}$ là một không gian có tích vô hướng và $x, y \in \mathcal{X}$. Khi đó,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ nếu } x \perp y.$$

Với một tập con S của $\mathcal{X}$, ta viết

$$S^{\perp} = \{x \in \mathcal{X} | \langle x, u \rangle = 0 \text{ với mọi } u \in S\}.$$

Nếu S_1, S_2 là các tập con của không gian có tích vô hướng sao cho $x \perp y$ với mọi $x \in S_1$ và $y \in S_2$ thì ta viết $S_1 \perp S_2$.

1.1.2 Toán tử bị chặn

Ánh xạ $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ giữa hai không gian tuyến tính $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ được gọi là **toán tử tuyến tính** nếu

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathcal{X},$$

$$\text{và } T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Nếu $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là toán tử tuyến tính thì ta thường viết Tx thay cho $T(x)$ với mọi $x \in \mathcal{X}$. Ta kí hiệu

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{X} | Tx = 0\}$$

là một không gian con của $\mathcal{X}$, được gọi là **không gian không điểm** của T, và

$$\mathcal{R}(T) = \{Tx | x \in \mathcal{X}\}$$

là không gian con của $\mathcal{Y}$, được gọi là **miền giá trị** của T.

Cho $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là toán tử tuyến tính giữa các không gian tuyến tính định chuẩn $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$. Có thể thấy rằng T là liên tục nếu và chỉ nếu tồn tại $c > 0$ sao cho

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in \mathcal{X},$$

trong trường hợp này

$$\inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in \mathcal{X}\} = \sup\{\|Tx\| | x \in \mathcal{X}, \|x\| \leq 1\}.$$

Do đó, toán tử tuyến tính liên tục còn được gọi là **toán tử tuyến tính giới nội** hay **toán tử bị chặn**. Ta ký hiệu tập tất cả các toán tử bị chặn từ $\mathcal{X}$ vào $\mathcal{Y}$ là $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Toán tử tuyến tính $P : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ trên không gian tuyến tính $\mathcal{X}$ được gọi là **toán tử chiếu** hay **phép chiếu** nếu

$$Px = x, \forall x \in \mathcal{R}(P)$$

Do đó, một toán tử tuyến tính $P : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ là toán tử chiếu nếu và chỉ nếu $P^2 = P$. Nếu P là phép chiếu thì $I - P$ cũng là phép chiếu và

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P), \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P).$$

Cho $\mathcal{X}$ là không gian có tích vô hướng. Khi đó, phép chiếu $P : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ được gọi là phép chiếu trực giao nếu $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$, tức là

$$\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in \mathcal{R}(P), \forall y \in \mathcal{N}(P).$$

1.1.3 Một số định lí quan trọng

Cho $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ là các không gian tuyến tính định chuẩn và $\{T_n\}$ là dãy các toán tử trong $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Ta nói dãy $\{T_n\}$ hội tụ từng điểm trên $\mathcal{X}$, nếu với mỗi $x \in \mathcal{X}, \{T_n x\}$ hội tụ. Dễ thấy $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ xác định bởi

$$Tx = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_n x,\ x \in \mathcal{X}$$

là toán tử tuyến tính. Tuy nhiên T không nhất thiết phải thuộc $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Cho $\mathcal{X}$ là một không gian tuyến tính định chuẩn, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, α_0 là **điểm tụ** của Λ và $x_\alpha \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \Lambda$. Ta nói rằng x_α hội tụ tới $x \in \mathcal{X}$ khi $\alpha \longrightarrow \alpha_0$ và viết

$$x_\alpha \longrightarrow x \text{ khi } \alpha \longrightarrow \alpha_0 \text{ hay } \lim_{\alpha \longrightarrow \alpha_0} x_\alpha = x,$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|x - x_\alpha\| \leq \varepsilon \text{ khi } \alpha \in \Lambda, |\alpha - \alpha_0| < \delta.$$

Một họ $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ của các toán tử trong $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ được gọi là **bị chặn đều** nếu tập $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha\in\Lambda}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$ và $\{T_\alpha\}$ được gọi là **hội tụ từng điểm** trên $\mathcal{X}$ khi $\alpha \longrightarrow \alpha_0$ nếu $\{T_\alpha x\}$ hội tụ với mọi $x \in \mathcal{X}$ khi $\alpha \longrightarrow \alpha_0$.

Mệnh đề 1.1. *([10] tr 31) Cho $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ là các không gian tuyến tính định chuẩn, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ là họ bị chặn đều của các toán tử trong $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, với Λ là một tập con của $\mathbb{R}$ có điểm tụ α_0. Nếu $\{T_\alpha\}$ hội tụ từng điểm trên $\mathcal{X}$ thì toán tử $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ xác định bởi $Tx = \lim\limits_{\alpha\longrightarrow\alpha_0} T_\alpha x$, $x \in \mathcal{X}$ thuộc $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Định lí 1.1. ***(Nguyên lý bị chặn đều)*** *([10] tr 32) Cho $\mathcal{X}$ là không gian Bannach, $\mathcal{Y}$ là không gian tuyến tính định chuẩn và $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ là một tập con của $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Nếu $\{\|T_\alpha x\|\}_{\alpha\in\Lambda}$ bị chặn với $\forall x \in \mathcal{X}$ thì $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bị chặn đều.*

Định lí 1.2. ***(Định lí Banach - Steinhaus)*** *([10] tr 32) Cho $\mathcal{X}$ là không gian Banach và $\mathcal{Y}$ là không gian tuyến tính định chuẩn và $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ là một tập con của $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, với Λ là một tập con của $\mathbb{R}$ có điểm tụ α_0. Nếu $\{T_\alpha x\}$ hội tụ khi $\alpha \longrightarrow \alpha_0$ với mọi $x \in \mathcal{X}$ thì $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bị chặn đều và toán tử $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ xác định bởi $Tx = \lim\limits_{\alpha\longrightarrow\alpha_0} T_\alpha x, x \in \mathcal{X}$ thuộc vào $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Định lí 1.3. ***(Định lí Đồ thị đóng)****([10] tr 35) Cho $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ là các không gian Bannach, $\mathcal{X}_0$ là không gian con của $\mathcal{X}$. Khi đó, toán tử tuyến tính $T : \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{Y}$ đóng nếu và chỉ nếu $\mathcal{X}_0$ là đóng trong $\mathcal{X}$.*

1.2 Nghịch đảo suy rộng Moore - Penrose

Cho $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ là các không gian Hilbert, $y \in \mathcal{Y}$ và $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là toán tử tuyến tính. Xét phương trình

$$Tx = y \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.1. ([8] tr 32) $\overline{x} \in \mathcal{X}$ được gọi là tựa nghiệm của phương trình (1.1) nếu

$$\|T\overline{x} - y\| = \inf\{\|Tx - y\| | x \in \mathcal{X}\}. \tag{1.2}$$

Định lí 1.4. *([10] tr 142) Cho $\mathcal{X}$ là không gian tuyến tính, $\mathcal{Y}$ là không gian Hilbert và $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là toán tử tuyến tính, $P : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là phép chiếu trực giao lên $\overline{\mathcal{R}(T)}$. Với mọi $y \in \mathcal{Y}$, các mệnh đề sau là tương đương:*

(i)Phương trình (1.1) có một tựa nghiệm.

(ii) $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

(iii) Phương trình $Tx = Py$ với $x \in \mathcal{X}$ có nghiệm.

Chứng minh. $(i) \Leftrightarrow (iii)$

Vì $\inf\{\|Tv - y\| | v \in \overline{R(T)}\} = \|Py - y\|$ nên

$$\begin{aligned}\inf\{\|Tz - y\| | z \in \mathcal{X}\} &= \inf\{\|v - y\| | v \in \mathcal{R}(T)\} \\ &= \inf\{\|v - y\| | v \in \overline{\mathcal{R}(T)}\} = \|Py - y\|.\end{aligned}$$

Mặt khác, với mọi $x \in \mathcal{X}$ ta có

$$Tx - y = (Tx - Py) + (Py - y)$$

với $(Tx - Py) \in \mathcal{R}(T)$ và $(Py - y) \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$. Do đó

$$\|Tx - y\|^2 = \|Tx - Py\|^2 + \|Py - y\|^2$$

nên suy ra $\overline{x} \in \mathcal{X}$ là tựa nghiệm của phương trình (1.1) nếu và chỉ nếu $T\overline{x} = Py$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

$y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp} \Leftrightarrow y = y_1 + y_2$ với $y_1 \in \mathcal{R}(T), y_2 \in \mathcal{R}(T)^{\perp} \Leftrightarrow Py = Py_1 + Py_2 = Py_1 = y_1 \in R(T)$, hay phương trình $Tx = Py$ có nghiệm với mọi $x \in \mathcal{X}$. □

Cho $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ và T như trong Định lí 1.4, với $y \in \mathcal{Y}$, ta ký hiệu $S_y = \{x \in \mathcal{X} : \|Tx - y\| = \inf \|Tz - y\| | z \in \mathcal{X}\}$. Khi đó, theo Định lí 1.4, $S_y \neq \varnothing$ nếu và chỉ nếu $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

Hệ quả 1.1. *([10] tr 143) Cho $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ và T như trong Định lí 1.4, $y \in \mathcal{Y}$ sao cho $S_y \neq \varnothing$. Nếu $x_0 \in S_y$ thì*

$$S_y = \{x_0 + z | z \in \mathcal{N}(T)\}.$$

Đặc biệt, nếu T đơn ánh và $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp}$ thì phương trình (1.1) có tựa nghiệm duy nhất.

Chứng minh. Dễ thấy x_0 là một tựa nghiệm của phương trình nên với mọi $z \in \mathcal{N}(T)$ thì $x_0 + z$ cũng là một tựa nghiệm. Do đó, $x_0 + \mathcal{N}(T) \subseteq S_y$. Mặt khác, với $P : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là phép chiếu trực giao lên $\overline{\mathcal{R}(T)}$ và $x_0 \in S_y$ thì theo Định lí 1.4, với mọi $x \in S_y$ có $Tx = Py = Tx_0$. Vì vậy $x = x_0 + z$ với $z = x - x_0 \in \mathcal{N}(T)$. Suy ra $S_y \subseteq \{x_0 + z | z \in \mathcal{N}(T)\}$. Vậy $S_y = x_0 + \mathcal{N}(T)$. Đặc biệt, khi $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ thì T là đơn ánh. □

Định lí 1.5. *([10] tr 144) Cho $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ là các không gian Hilbert, X_0 là một không gian con của $\mathcal{X}$ và $T : X_0 \longrightarrow \mathcal{Y}$ là một toán tử tuyến tính với $\mathcal{N}(T)$ đóng trong $\mathcal{X}$. Cho $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp}$. Khi đó, tồn tại duy nhất $x^{\dagger} \in S_y$ sao cho*

$$\|x^{\dagger}\| = \inf\{\|x\| | x \in S_y\}.$$

Hơn nữa, $x^{\dagger} \in \mathcal{N}(T)^{\perp}$ và $x^{\dagger} = Qx_0$, với $Q : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ là phép chiếu trực giao lên $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ và x_0 là phần tử nào đó trong S_y.

Chứng minh. Cho $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^{\perp}$ thì theo Định lí 1.4 có $S_y \neq \varnothing$. Lấy $x_0 \in S_y$. Theo Hệ quả 1.1 ta có $S_y = \{x_0 + z | z \in \mathcal{N}(T)\}$. Lấy $x^{\dagger} = Qx_0$ với $Q : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ là phép chiếu trực giao lên $\mathcal{N}(T)^{\perp}$. Khi đó, ta có $x_0 = x^{\dagger} + z$ với $z \in \mathcal{N}(T)$. Điều này suy ra rằng $x^{\dagger} = x_0 - z \in X_0$. Do đó, theo Định lí 1.4

$$Tx^{\dagger} = Tx_0 = Py$$

với $P : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ là phép chiếu trực giao lên $\overline{\mathcal{R}(T)}$. Vậy $x^{\dagger} \in S_y$.
Theo Hệ quả 1.1, với mọi $x \in S_y$ có $x - x^{\dagger} \in \mathcal{N}(T)$. Áp dụng Định lí Pytago ta được

$$\|x\|^2 = \|x^{\dagger}\|^2 + \|x - x^{\dagger}\|^2.$$

Do vậy, $\|x^{\dagger}\| \leq \|x\|$ với mọi $x \in S_y$.

Giả sử tồn tại $x_1 \in S_y$ sao cho $\|x_1\| \leqslant \|x\|$ với mọi $x \in S_y$. Khi đó,

$$\|x_1\| \leqslant \|x^{\dagger}\| \leqslant \|x_1\|$$

nên $\|x_1\| = \|x^\dagger\|$. Lại áp dụng Hệ quả 1.1 và Định lí Pytago ta được $x_1 - x^\dagger \in N(T)$ và $\|x_1\|^2 = \|x^\dagger\|^2 + \|x_1 - x^\dagger\|^2$. Từ đó suy ra $x_1 = x^\dagger$. Vậy $x^\dagger$ là duy nhất. $\square$

Định nghĩa 1.2. ([10] tr 145) Cho $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ là các không gian Hilbert, X_0 là một tập con của $\mathcal{X}$ và $T : X_0 \to \mathcal{Y}$ là một toán tử tuyến tính với $\mathcal{N}(T)$ đóng trong $\mathcal{X}$. Từ Định lí 1.5, với mọi $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$ tập

$$S_y = \{x \in X_0 | \|Tx - y\| = \inf\{\|Tz - y\| | z \in X_0\}.$$

không rỗng và tồn tại duy nhất $x^\dagger \in S_y$ sao cho $\|x^\dagger\| = \inf\{\|x\| | x \in S_y\}$. Thực tế, theo Định lí 1.4 và 1.5, $x^\dagger$ là phần tử duy nhất của $\mathcal{N}(T)^\perp$ sao cho

$$Tx^\dagger = Qy,$$

trong đó $Q : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ là phép chiếu trực giao lên $\overline{\mathcal{R}(T)}$.

Ta định nghĩa toán tử nghịch đảo suy rộng theo nghĩa Moore-Penrose $T^\dagger$ là một quy tắc mà mỗi phần tử $y \in \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$ tương ứng với duy nhất một tựa nghiệm có chuẩn nhỏ nhất

$$T^\dagger : R(T) + R(T)^\perp \to X$$

là toán tử tuyến tính với tập xác định là $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$. Toán tử $T^\dagger$ được gọi là **nghịch đảo suy rộng hay nghịch đảo Moore - Penrose của toán tử** T và $x^\dagger = T^\dagger y$ được gọi là **nghiệm suy rộng** của (1.1).Từ đây suy ra

$$T^\dagger y = \left(T|_{\mathcal{N}(T) \cap X_0}\right)^{-1} Qy, y \in \mathcal{D}(T^\dagger).$$

Ta có hai mệnh đề sau về nghịch đảo suy rộng Moore-Penrose:

Mệnh đề 1.2. *([8] tr 33) Cho P, Q lần lượt là các phép chiếu trực giao lên $\mathcal{N}(T)$ và $\mathcal{R}(T)$. Khi đó, $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ và **bốn phương trình Moore - Penrose** sau thỏa mãn:*

$$TT^\dagger T = T, \tag{1.3}$$

$$T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger, \tag{1.4}$$

Tài liệu tham khảo

[A] **Tài liệu tiếng Việt**

[1] Phạm Kỳ Anh, Trần Đức Long (2003), *Hàm thực và giải tích hàm,* Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

[2] Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường (2007), *Bài toán đặt không chỉnh*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

[B] **Tài liệu tiếng Anh**

[3] A.G. Ramm and A.B. Smirnova (2001),"On stable numerical differentiation",*Mathematics of Computation,* 70(235), pp. 1131-1153.

[4] B.Fornberg(1988),"Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids",*Mathematics of Computation,* 51(184),pp. 699-706.

[5] B. Fornberg(1998),"Calculation of weights in finite difference formulas", *Society for Industrial and Applied Mathematics,* 40(3),pp. 685-691.

[6] B.P. Kovatchev, M.Breton, C.D.Man and C.Cobelli, (2009) "A Proof of Concept in Closed-Loop Control of Type 1 Diabetes",*Journal of Diabetes Science and Technology,* 3(1), pp. 44-55.

[7] E.Kreyszig (1978)*Introductory functional analysis with applications,* John Wiley và Sons.Inc, United States of America.

[8] H.W.Engl, M.Hanke, A.Neubauer(1996),*Regularization of Inverse Problems,* Kluwer Academic Publishers.

[9] H.W. Engl and H.Gfrerer(1988)," A postenori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems", *Applied Numerical Mathematics,* 4,pp.395-417.

[10] M.T. Nair(2009),*Linear Operator Equations Approximation and Regularization,*World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[11] O.Scherzer, M.Grasmair, H.Grossauer, M.Haltmeier, F.Lenzen (2009 *Variational Methods in Imaging,* Springer Science+Business Media, LLC, New York.

[12] S.Sivananthan, V.Naumova, C.D. Man, A.Facchinetti, E.Renard, C.Cobelli, and S.V. Pereverzyev (2011),"Assessment of Blood Glucose Predictors: The Prediction-Error Grid Analysis",*Diabetes technology và therapeutics,* 13(8),pp. 787-796.

[13] S. Lu, S.V. Pereverzev(2006), "Numerical differentiation from a viewpoint of regularization theory",*Mathematics of Computation*, 75(256),pp. 1853–1870.

[14] T.Raus, U. Hämarik(2008),"About the balancing principle for choice of the regularization parameter",*Journal of Physics,* 135 (2008) 012087, pp. 1-9.

[15] V. Naumova, S.V.Pereverzyev and S. Sivananthan (2011),"Extrapolation in variable RKHSs with application to the blood glucose reading",*Inverse Problems,* 27, pp. 1-13.

[16] V. Naumova, S.V. Pereverzyev, S. Sivananthan(2012),"Adaptive parameter choice for one-sided finite difference schemes and its application in diabetes technology",*Journal of Complexity*,28,pp. 524-538.