ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN SƠN

ƯỚC LƯỢNG GRADIENT ĐỊA PHƯƠNG CHO CÁC HÀM p-ĐIỀU HÒA TRÊN ĐA TẠP RIEMANN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội – Năm 2014

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN SƠN

ƯỚC LƯỢNG GRADIENT ĐỊA PHƯƠNG CHO CÁC HÀM p-ĐIỀU HÒA TRÊN ĐA TẠP RIEMANN

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Nguyễn Thạc Dũng

Hà Nội – Năm 2014

Mục lục

Lời cám ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc của mình tới TS. Nguyễn Thạc Dũng, người đã tận tình giúp đỡ và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn tốt nghiệp. Qua đây tôi cũng xin chân thành cám ơn sự giúp đỡ của các thầy giáo, cô giáo trong tổ Toán giải tích trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, các thầy cô của Viện Toán, những người đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Do mới làm quen với công tác nghiên cứu khoa học và còn hạn chế về thời gian thực hiện nên luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, năm 2014

Danh mục ký hiệu

C^∞ Tập hợp tất cả các hàm khả vi vô hạn.

C_0^k Tập hợp tất cả các hàm khả vi cấp k có giá compact.

$W^{k,p}$ Không gian Sobolev chứa các hàm và các đạo hàm yếu của nó tới bậc k có chuẩn L^p hữu hạn, với $p \geq 1$ cho trước.

$W_0^{k,p}$ Không gian định chuẩn là bao đóng của C_0^k trong $W^{k,p}$.

$W_{loc}^{k,p}$ Không gian các hàm khả tích địa phương trong $W^{k,p}$.

Mở đầu

Việc nghiên cứu các hàm điều hòa trên đa tạp Riemann là một trong những đối tượng chính trong hình học vi phân. Việc nghiên cứu này là cần thiết vì lý thuyết các hàm điều hòa có liên hệ chặt chẽ đến hình học và tôpô của đa tạp. Một trong các bài toán được quan tâm trong lý thuyết này là tìm các ước lượng gradient cho các hàm này. Trong bài báo nổi tiếng của mình, Cheng-Yau [12] đã chứng minh ước lượng gradient cho hàm điều hòa dương trên đa tạp Riemann như sau.

Định lý 0.1. *(Cheng-Yau) Cho M là một đa tạp Riemann đầy đủ n-chiều với $Ric \geq -(n-1)\kappa$, với $\kappa \geq 0$ là một hằng số. Giả sử u là một hàm điều hòa dương trên hình cầu trắc địa $B(o, R)$. Khi đó*

$$\sup_{B(o,R/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \frac{1 + R\sqrt{\kappa}}{R} \tag{1}$$

trong đó C_n là một hằng số chỉ phụ thuộc vào n.

Điều quan trọng trong ước lượng của Cheng-Yau là vế phải của Định lý 0.1 chỉ phụ thuộc vào n, κ và R.

Có hai phần chính trong chứng minh của định lý trên. Phần quan trọng đầu tiên là công thức Bochner được sử dụng để ước lượng cận dưới của toán tử Laplace tác động lên $|\nabla u|^2$ của một hàm điều hòa u bởi các số hạng chỉ phụ thuộc vào cận dưới của độ cong Ricci. Phần quan trọng thứ hai là một kỹ thuật thông minh về nguyên lý cực đại. Kỹ thuật này là nhân $|\nabla u|^2$ với một hàm cut-off được xây dựng bằng cách sử dụng hàm khoảng cách. Kết quả là, bất đẳng thức vi phân mới liên quan đến Laplace của hàm khoảng cách. Như đã biết, hàm khoảng cách trên đa tạp Riemann là Lipschitz đều và toán tử Laplace tác động lên hàm khoảng cách có một cận trên chỉ phụ thuộc vào cận dưới của tensor Ricci.

Cách tiếp cận của Cheng-Yau là rất hữu ích và một số kết quả quan trọng của nhiều bài toán khác nhau được ảnh hưởng sâu sắc bởi định lý trên. Lấy ví dụ, năm 1979, P.Li [4] thu được một ước lượng cận dưới chặt cho giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace trên một đa tạp, kết quả này sau đó được tổng quát bởi Li-Yau [5]. Các kết quả tương tự cho phương trình nhiệt cũng thu được bởi Li-Yau. Ngoài ra, S.Y.Cheng [10], H.I.Choi [3] đã chứng minh các ước lượng gradient cho ánh xạ điều hòa,...

Mặt khác, các hàm p-điều hòa ($p > 1$) được xem là mở rộng tự nhiên của các hàm điều hòa từ quan điểm biến phân. Nó đã được nghiên cứu rộng rãi vì có nhiều đặc trưng và ứng dụng thú vị. So với lý thuyết hàm điều hòa, các nghiên cứu về các hàm p-điều hòa nói chung là khó khăn hơn vì phương trình này mặc dù là elliptic, nhưng là suy biến và các kết quả về tính chính quy là yếu hơn. Gần đây, các hàm p-điều hòa được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học. Đặc biệt, năm 2007, R.Moser [11] đã thiết lập một liên hệ giữa các hàm p-điều hòa và bài toán ngược cho dòng độ cong trung bình. Trong một bài báo gần đây vào năm 2009, Kotschwar và Ni [2] đã chứng minh được nhiều kết quả cho hàm p-điều hòa, một trong số đó là một ước lượng gradient địa phương cho các hàm p-điều hòa với giả thiết rằng độ cong nhát cắt bị chặn hạn dưới. Đáng chú ý là hằng số trong tính toán của họ không bị tăng vọt khi $p \to 1$, dẫn đến kết quả thú vị về bài toán ngược cho dòng độ cong trung bình. Phương pháp chứng minh của họ là tương tự với phương pháp được phát triển bởi Cheng và Yau năm 1975 cho các hàm điều hòa (tức là $p = 2$).

Kotschwar và Ni đã dự đoán rằng ước lượng của họ có thể giữ nguyên nếu chỉ giả thiết về cận dưới của tensor Ricci. Năm 2011, X. D. Wang và L. Zhang [13] đã chứng minh phỏng đoán của Kotschwar và Ni bằng cách thiết lập định lý sau.

Định lý 0.2. *Cho (M^n, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ với $Ric \geq -(n-1)k$. Giả sử v là một hàm p-điều hòa dương trong hình cầu $B(o, R) \subset M$. Khi đó, tồn tại một hằng số $C_{p,n}$ (chỉ phụ thuộc vào p và n) sao cho*

$$\frac{|\nabla v|}{v} \leq \frac{C_{p,n}(1 + \sqrt{k}R)}{R}$$

trên $B(o, R/2)$.

Chú ý rằng khi $p = 2$, các hàm p-điều hòa chính là hàm điều hòa. Do đó ước lượng gradient này có thể xem là tổng quát hóa của ước lượng gradient của Cheng-Yau như đã đề cập đến trong phần đầu của lời giới thiệu.

Toàn bộ nội dung của luận văn này là để làm rõ cách chứng minh của định lý kể trên của Wang-Zhang. Luận văn được viết lại dựa trên bài báo [13] và bao gồm hai chương. Trong phần chương một, tôi nhắc lại các kiến thức cơ bản về hình học vi phân và toán tử Laplace trên đa tạp Riemann. Trong chương hai, tôi phân tích kỹ và trình bày một cách chi tiết các bước chứng minh của định lý Wang-Zhang. Trong đó, chúng ta sử dụng một phiên bản của công thức Bochner cho hàm p-điều hòa, công thức này được sử dụng cho toán tử tuyến tính hóa của toán tử phi tuyến Δ_p và được giới thiệu trong bài báo của Kotschwar-Ni. Nhờ công thức này, chúng ta thu được một ước lượng chuẩn trong không gian L^{b_1} của grandient của hàm p-điều hòa với b_1 phù hợp. Phần tiếp theo là chứng minh một ước lượng cận trên của chuẩn *sup* theo chuẩn L^{b_1} này bằng cách sử dụng phép lặp Moser, kết quả là chứng minh được Định lý 0.2. Tôi cũng đưa ra chứng minh của hai kết quả liên quan đến ước lượng gradient này. Kết quả đầu tiên là định lý kiểu Harnack và kết quả thứ hai là định lý Liouville cho hàm p-điều hòa.

Chương 1

TOÁN TỬ LAPLACE TRÊN ĐA TẠP RIEMANN

Trong chương này, chúng ta sẽ trình bày lại một vài khái niệm cơ bản của hình học vi phân. Đầu tiên, chúng ta nhắc lại các khái niệm đa tạp, đa tạp trơn, định nghĩa đa tạp Riemann. Tiếp sau đó, chúng ta xây dựng một vài phép toán cơ bản để đưa ra định nghĩa của toán tử Laplace. Cuối cùng, chúng ta giới thiệu khái niệm độ cong Ricci và một vài tính chất tiêu biểu của các độ cong này.

1.1 Toán tử Laplace trên đa tạp Riemann

A. Đa tạp trơn

Định nghĩa 1.1. *Cho M là một không gian tôpô Hausdorff và có cơ sở đếm được. Nó được gọi là một đa tạp tôpô n chiều nếu với mọi $p \in M$, tồn tại một bộ ba $\{\varphi, U, V\}$ trong đó U là một lân cận của p trong M, V là một tập con mở của $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ là một đồng phôi. Một bộ ba như vậy gọi là một bản đồ tại p.*

Hai bản đồ $\{\varphi_1, U_1, V_1\}$ và $\{\varphi_2, U_2, V_2\}$ được gọi là tương thích nếu hàm chuyển

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

là một đồng phôi. Chú ý rằng các tập ảnh $\varphi_1(U_1 \cap U_2), \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ là các tập mở thuộc $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. *Một tập $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha\}$ trên M được gọi là một tập bản đồ nếu các bản đồ của $\mathcal{A}$ đều tương thích với nhau và $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$. Hai tập bản đồ trên M được gọi là tương đương nếu hợp của chúng cũng là một tập bản đồ trên M.*

Định nghĩa 1.3. *Một đa tạp trơn n-chiều M là một đa tạp tôpô n-chiều được trang bị một lớp tương đương các tập bản đồ sao cho các hàm chuyển là các hàm trơn. Một lớp tương đương của một tập bản đồ trơn được gọi là một cấu trúc trơn trên M.*

Ví dụ 1.4. Một vài đa tạp trơn cùng với cấu trúc trơn

- $\mathbb{R}^n$ là một đa tạp trơn.
- Một tập con mở của đa tạp trơn cũng là một đa tạp trơn.

Ví dụ 1.5. Hình cầu $S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ là một đa tạp trơn. Cho $U_1 = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ và $U_2 = S^n - \{(0, \cdots, 0, -1)\}$, ta xét các phép chiếu nổi $\varphi_i : U_i \to R^n$ định nghĩa bởi

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n) \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n).$$

Khi đó $\{\varphi_1, U_1, R^n\}, \{\varphi_2, U_2, R^n\}$ tạo thành tập bản đồ trên S^n. Có thể tính toán trực tiếp rằng ánh xạ chuyển φ_{12} là ánh xạ trơn. Do đó, hình cầu là một đa tạp trơn.

Định nghĩa 1.6. *Một ánh xạ $f : M \to N$ giữa hai đa tạp trơn được gọi là trơn nếu với mỗi bản đồ $\{\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha\}$ bất kì của M và $\{\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta\}$ bất kì của N, khi đó ánh xạ*

$$\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(X_\beta)) \to \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap X_\beta)$$

là trơn. Ta nói rằng $f : M \to N$ là một vi phôi nếu nó là song ánh và f, f^{-1} đều là các ánh xạ trơn.

Khi $N = \mathbb{R}$, ta sẽ gọi f là một hàm trơn giá trị thực. Tập hợp tất cả các hàm trơn giá trị thực trên M được kí hiệu là $C^\infty(M)$.
Bất kỳ ánh xạ trơn $f : M \to N$ đều cảm sinh một ánh xạ kéo-lùi

$$f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M), g \mapsto g \circ f.$$

B. Vectơ tiếp xúc

Cho M là một đa tạp trơn n-chiều.

Định nghĩa 1.7. *Một vectơ tiếp xúc tại một điểm $p \in M$ là một ánh xạ tuyến tính $X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn quy tắc Leibnitz*

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p).$$

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Ngọc Diệp(2010), *Hình học vi phân*, NXB ĐHQG, Hà Nội.

[2] B. Kotschwar, L.Ni, "Local gradient estimates of p-harmonic functions, $1/H$-flow, and an entropy formula", Ann, Sci, Éc, Norm, Supér. (4) 42 (2009), no. 1, 1-36.

[3] H.I.Choi, On the Liouville theorem for harmonic maps. Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), no. 1, 91 - 94.

[4] P.Li, A lower bound for the first eigenvalues of the Laplacian on a compact manifold. Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), no. 6, 1013-1019.

[5] P.Li, S.T.Yau, Estimate of the first eigenvalues of a compact Riemannian manifold. Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), pp. 205-239, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[6] P. Tolksdorf, "Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations", J.Differential Equation 51 (1984), no. 1,126-150.

[7] I. Holopainen, Volume growth, Green's function, and parobolicity of ends. Duke Math. Journal 97 (1999), 319-346.

[8] L. Saloff-Coste, "Uniformly elliptic operators on Riemann manifolds", J.Differential Geom. 36 (1992), no. 2,417-450.

[9] M. Rigoli, M. Salvatori, and M. Vignati, A note on p-subharmonic function on complete manifolds. Manuscripta Math. 92 (1997), 339-359.

[10] S.Y.Cheng, Liouville theorem for harmonic maps. Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ, Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), pp. 147-151, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[11] R. Moser, The inverse mean curvature flow and p-harmonic functions. J.Eur. Math. Soc. 9 (2007), 77-83.

[12] R. Schoen, S.T. Yau, Lectures on Differential Geometry. International Press, Boston, 1994.

[13] Xiaodong Wang, Lei Zhang(2011), "Local gradient estimate for p-harmonic functions on Riemann manifolds", Comm. Anal. Geom. 19 (2011), no. 4, 759-771.

[14] Zuoqin Wang(2012), "Notes on Differential Geometry", Lecture notes, http://www-personal.umich.edu/~wangzuoq/.

[15] Zuoqin Wang(2013), "Notes on Smooth Manifolds", Lecture notes, http://www-personal.umich.edu/~wangzuoq/.