ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- - - - - - - - - o0o - - - - - - - - -

ĐỖ THỊ HƯỜNG

VỀ DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội - 2014

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- - - - - - - - - o0o - - - - - - - - -

ĐỖ THỊ HƯỜNG

VỀ DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. ĐẶNG ĐÌNH CHÂU

Hà Nội - 2014

Mục lục

Mở Đầu

Việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiêm của các phương trình vi phân (PTVP) trong không gian Hilbert có ý nghĩa hết sức quan trọng trong lý thuyết định tính các phương trình vi phân và trong các bài toán ứng dụng (xem [3]). Trong thời gian gần đây, lý thuyết PTVP trong không gian Banach nói chung và PTVP trong không gian Hilbert được phát triển khá mạnh mẽ vì nó đáp ứng được nhiều đòi hỏi đặt ra trong các mô hình ứng dụng . Đặc biệt là các bài toán mô tả bằng toán học các hiện tượng chuyển động của vật thể, quá trình sinh trưởng và phát triển của các loài sinh vật (xem[6]). Trong bản luận văn này, tôi sẽ trình bày lại một cách hệ thống một số kết quả liên quan tới sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính có nhiễu và tính chất nghiệm của chúng . Phương pháp nghiên cứu cơ bản của tôi là sử dụng tính chất của toán tử Volterra kết hợp với việc sử dụng chuẩn Bielecki trong không gian Hilbert để nghiên cứu sự tồn tai duy nhất nghiệm của các PTVP ở dạng phương trình toán tử trong không gian hàm . Để nghiên cứu tính chất nghiệm của PTVP trong không gian Hilbert, tôi đã sử dụng phương pháp xấp xỉ thứ nhất của Lyapunov cho các PTVP dạng tam giác trên trong không gian Hilbert . Trong phần cuối của luận văn, tôi đã trình bày lại phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của các PTVP phi tuyến và một số ví dụ ứng dụng .

Nội dung chính của luận văn gồm 2 chương: chương một trình bày dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Banach, chương hai trình bày dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Hilbert và một số ví dụ áp dụng.

Bản luận văn này được thực hiện dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Đặng Đình Châu. Nhân dịp này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã dành nhiều công sức và thời gian để hướng dẫn, kiểm tra, giúp đỡ tôi trong việc hoàn thành bản luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến ban lãnh đạo và các thầy cô trong khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội về

các kiến thức và những điều tốt đẹp mang lại cho tôi trong thời gian học tập tại trường. Đồng thời, tôi xin cảm ơn tới phòng Sau Đại học đã tạo những điều kiện thuận lợi trong việc hoàn thành thủ tục học tập và bảo vệ luận văn.

Tôi muốn gửi lời cám ơn tới các thầy và các bạn trong seminar Phương trình vi phân về những sự động viên và những ý kiến trao đổi quí báu đối với bản thân tôi trong thời gian qua.

Cuối cùng, tôi muốn tỏ lòng biết ơn gia đình, người thân là chỗ dựa vững chắc về tinh thần và vật chất cho tôi trong cuộc sống và trong học tập để tôi có thể hoàn thành xong bản luận văn này .

Mặc dù, tôi đã có nhiều cố gắng nhưng bản luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô và các bạn.

Hà Nội, tháng 11 năm 2014

Đỗ Thị Hường

Chương 1

Dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình vi phân trong không gian Banach

1.1 Toán tử Volterra và ứng dụng cho các PTVP tuyến tính trong không gian Banach

Giả sử $(\mathbb{X}, ||.||)$ là một không gian Banach. Xét PTVP trong không gian Banach

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó $t \in [a; b]$, $x : [a, b] \to \mathbb{X}$ là hàm (trừu tượng) phải tìm, hàm $f : [a, b] \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ liên tục thỏa mãn điều kiện Lipchitz tức là tồn tại $L : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ khả tích địa phương sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{X}$ ta có

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L(t)||x - y|| \tag{1.2}$$

Để chứng minh định lí về sự tồn tại duy nhất nghiệm của (1.1) sau đây chúng ta sẽ trình bày khái niệm toán tử Volterra và chuẩn Bielecki

Định nghĩa 1.1. *Toán tử Volterra*
Toán tử tích phân Volterra là toán tử $V : C([a, b], \mathbb{X}) \to C([a, b], \mathbb{X})$ xác định bởi

$$V(x)(t) = \int\limits_a^t f(t, s, x(s))ds$$

Trong đó $x \in C([a, b], \mathbb{X})$ là hàm trừu tượng cần tìm, V(x) là toán tử tích phân Volterra

Kí hiệu $C([a,b],\mathbb{X})$ là tập hợp tất cả các hàm liên tục từ $[a;b]$ vào $\mathbb{X}$.
Kí hiệu chuẩn Bielecki

$$||x(t)||_{B,p} = \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}||x(t)||, p > 0$$

Ta dễ dàng thấy rằng nếu $x = x(t), t \in [a;b]$ là nghiệm của (1.1) thì

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{1.3}$$

Kí hiệu $V[x(t)] = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$
Khi đó , ta có toán tử Volterra $V : C([a,b],\mathbb{X}) \to C([a,b],\mathbb{X})$

Bổ đề 1.1. *Trong không gian $C([a,b],\mathbb{X})$ toán tử Volterra $V : C([a,b],\mathbb{X}) \to C([a,b],\mathbb{X})$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$||V[x(t)] - V[y(t)]|| \le \frac{1}{p}||x(t) - y(t)||$$

trong đó $t \in [a;b], p > 1$

Chứng minh. Ta có

$$||V[x(t)] - V[y(t)]|| = ||x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - (x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau)||$$
$$= ||\int\limits_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))]d\tau||$$

Sử dụng điều kiện Lipchitz (1.2) ta có

$$||V[x(t)] - V[y(t)]|| \le \int\limits_{t_0}^{t} L(\tau)||x(\tau) - y(\tau)||d\tau$$

Do đó

$$\begin{aligned}
||V(x)-V(y)||_{B,p} &= \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}||V(x)(t)-V(y)(t)|| \\
&= \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}||\int\limits_a^t [f(t,s,x(s))-f(t,s,y(s))]ds|| \\
&\le \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t ||f(t,s,x(s))-f(t,s,y(s)||ds \\
&\le \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)||x(s)-y(s)||ds \\
&= \sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)e^{p\int\limits_a^s L(u)du}[e^{-p\int\limits_a^s L(u)du}||x(s)-y(s)||]ds \\
&\le ||x-y||_{B,p}\sup_{a\le t\le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)e^{p\int\limits_a^s L(u)du}ds \\
&\le \frac{1}{p}||x-y||_{B,p}
\end{aligned}$$

□

Giả sử G là một miền mở trong $\mathbb{X}$ và $f:[a,b]\times G\to\mathbb{X}$, $(t_0,x_0)\in G_0$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện Lipchitz (1.2).

Xét hình hộp $Q=\{(t,x)/t_0-\alpha\le t\le t_0+\alpha, ||x-x_0||\le\beta\}$, trong đó α,β đủ nhỏ để $[t_0-\alpha;t_0+\alpha]\subset[a;b], G_0\subset G$.

Xét tương ứng $V: C([t_0-\alpha;t_0+\alpha],G_0)\to C([t_0-\alpha;t_0+\alpha],G_0)$.

Đặt $V[x(t)]=\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))d\tau$.

Bổ đề 1.2. a) *Tương ứng V là một ánh xạ từ* $([t_0-\alpha;t_0+\alpha],G_0)$ *vào* $([t_0-\alpha;t_0+\alpha],G_0)$.

b) $||V[x(t)]-V[y(t)]||\le\dfrac{1}{p}||x(t)-y(t)||$

Chứng minh.

$$||V[x(t)] - V[x_0]|| = ||x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau - x_0||$$

$$= ||\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau||$$

Sử dụng điều kiện Lipchitz (1.2) ta có

$$||V[x(t)] - V[x_0]|| \le \int\limits_{t_0}^{t} L(\tau)||x(\tau)||d\tau$$

Chọn $\alpha = \dfrac{1}{L_0}$ với $\sup\limits_{a \le t \le b} |L(t)| \le L_0 < +\infty$

Do đó

$$\begin{aligned}
||V(x) - V(y)||_{B,p} &= \sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}||V(x)(t) - V(y)(t)||\\
&= \sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}||\int\limits_a^t [f(t,s,x(s)) - f(t,s,y(s))]ds||\\
&\le \sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t ||f(t,s,x(s)) - f(t,s,y(s)||ds\\
&\le \sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)||x(s) - y(s)||ds\\
&= \sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)e^{p\int\limits_a^s L(u)du}[e^{-p\int\limits_a^s L(u)du}||x(s) - y(s)||]ds\\
&\le ||x - y||_{B,p}\sup_{a \le t \le b} e^{-p\int_a^t L(s)ds}\int\limits_a^t L(s)e^{p\int\limits_a^s L(u)du}ds\\
&\le \frac{1}{p}||x - y||_{B,p}
\end{aligned}$$

□

Nguyên lí ánh xạ co: Giả sử $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ hoặc $A : S \to S$ trong đó $S = \{x/||x - x_0|| \le \beta\}$ thỏa mãn

$$||Ax - Ay|| \le L||x - y||$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục (2000).

[2] G. Belickii , *Equivalence and normal forms of smooth mappings*, Russian Math . Surveys **33** (1978), 107 - 177

[3] C. Chicone and Yu. Latushkin , *Evolution Semigroups in Dynamics Systems and Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs 70 Surveys, Amer. Math. Soc., 1999.

[4] E.Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw - Hill, 1955.

[5] Ju. Dalecki and M. Krein , *Stability of Solutions of Differential Equation on Banach Space*, Translation of Mathematical Monographs 43, Amer. Math. Soc., 1974.

[6] Luis Barreira - Claudia Valls , *Stability of Nonautonomous differential Equation* , Springer - Verlag Berlin Heidelgerg 2008.

[7] A. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion* , Taylor and Francis, 1922.

[8] J. Massera and J.Schaffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces* , Pure and Applied Mathematics 21, Academic Press, 1966.

[9] G. Sell and Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations* , Applied Mathematical Sciences 143, Springer, 2002.